11. **Koopmans L. H.** The spectral analysis of time series.— N. Y.: Academic Press, 1974.
12. **Bloomfield P.** Fourier analysis of time series: an introduction.— N. Y.: John Wiley, 1976.
13. **Бриллинджер Д.** Временные ряды. Обработка данных и теория.— М.: Мир, 1980.

*Поступила в редакцию 18 декабря 1984 г.*

---

УДК 519.241.5

**Я. А. БЕДРОВ**

*(Ленинград)*

ских систем часто результат эксперимента может быть представлен в виде графика значений одной изучаемой величины (функции), соответствующих некоторым равноотстоящим значениям другой (аргумента). Если при этом наблюдаемые значения функции содержат большую случайную составляющую, то самым простым средством борьбы с ней является многократное повторение эксперимента и последующее усреднение наблюдений, соответствующих одним и тем же значениям аргумента.

Однако в ряде случаев дело осложняется тем, что значения изучаемой функции, получаемые при повторных экспериментах и соответствующие одним и тем же значениям аргумента, отличаются не только за счет случайной составляющей. Из-за невозможности точной фиксации всех условий эксперимента отдельные графики могут, например, оказаться сдвинутыми вдоль оси значений аргумента. Подобная ситуация возникает при построении постстимульных гистограмм нейронных реакций, когда величина латентного периода при повторных стимуляциях не остается постоянной.

В этих условиях информация о количестве и относительном расположении точек максимума и минимума в исследуемой реакции содержится в каждой реализации. Однако попытка избавиться от случайной составляющей путем обычного усреднения может привести к тому, что она будет частично или полностью утеряна.

Так как деформации реакций, получаемых в повторных экспериментах, известны с точностью до параметра (величина сдвига), то эта априорная информация может быть использована для повышения точности оценивания среднего значения любой из наблюдаемых реакций.

Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в переборе всех возможных комбинаций сдвигов отдельных реакций с целью отыскания такой, при которой дисперсия сдвинутых реакций достигает минимума. Очевидно, что при большом их числе этот подход приводит к необходимости перебора огромного ($m^k$, где $m$ — число сдвигов каждой реакции, $k$ — число реакций) числа вариантов.

Другой подход сводится к постановке данной задачи как задачи оценивания, в которой неизвестные параметры — искомая реакция и величины сдвигов ее наблюдаемых реализаций. Обычным при решении таких задач является использование метода максимального правдоподобия. Однако в нашем случае применение этого метода оценивания потребует нахождения глобального максимума нелинейной функции от $n+k$ ($n$ — число отсчетов времени, в которых наблюдается реакция) аргументов.

Очевидно, что численное решение этой задачи при больших значениях $n$ и $k$ и при отсутствии уверенности в единственности точки максимума чрезвычайно трудоемко. Поэтому представляет практический интерес исследование возможности построения метода решения такой задачи, вычислительная сторона которого основывалась бы на хорошо разработанных методах линейной алгебры и гарантировала единственность решения.

В основе описанного ниже метода решения этой задачи лежит следующее построение. Рассматривается множество $\{Y_i\}_1^k$ реакций и операторов вида

$$\{M^{-p+l}\}_{l=0}^{m-1}, \quad m-1>p,$$

где $p$ — целое число; $M$ — оператор, осуществляющий некоторый малый сдвиг реакции. С помощью этих операторов каждой реакции

$$Y_i, \; i=1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k,$$

ставится в соответствие множество кривых

$$Y_{il}=M^{-p+l}Y_i, \quad l=0, \ldots, m-1.$$

Предполагается, что искомое среднее значение для реакции $Y_j$ при любом $i=1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k$ может быть приближенно представлено в виде взвешенной суммы средних значений кривых

$$Y_{il}, \quad l=0, \ldots, m-1,$$

причем сумма весов равна 1.

При таком представлении искомого среднего для реакции $Y_j$ задача определения оптимальной комбинации сдвигов сводится к решению системы линейных уравнений относительно этих весов.

Естественным обобщением частной задачи усреднения деформированных кривых будет случай, когда значения реакции могут быть представлены как результаты действия линейных операторов одного и того же типа на некоторую исходную недеформированную реакцию. Ниже дается формальная постановка задачи усреднения для этого общего случая и рассматривается метод, позволяющий разделить неизвестные и свести задачу усреднения к задаче нахождения решения переопределенной системы линейных уравнений, удовлетворяющего заданной системе линейных ограничений. Эффективность метода показана на примере решения задачи усреднения зашумленных и сдвинутых реализаций некоторой функции.

**Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим $n$-мерный вектор $\mathbf{X}$, компонентами которого являются значения некоторой функции $X(t)$ в узлах равномерной сетки значений аргумента $t$. Пусть в результате $k$ экспериментов получены $n$-мерные векторы $\{\mathbf{Y}_i\}_1^k$, удовлетворяющие следующей модели:

$$\mathbf{X}=A_i\mathbf{e}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i=1, \ldots, k; \tag{1}$$
$$A_i=\left\| M^{p_{\min}}\mathbf{Y}_i \,\vdots\, M^{p_{\min}+1}\mathbf{Y}_i \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, M^{p_{\max}}\mathbf{Y}_i \right\|,$$

где $M$ — $n\times n$ — заданная невырожденная матрица; $\mathbf{e}_i$ — $m$-мерный вектор, сумма компонент которого равна 1; $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ — $n$-мерный случайный вектор с нулевым средним значением; $p_{\min}<0$, $p_{\max}>0$ — известные целые числа; $m=p_{\max}-p_{\min}+1$.

Предположим, что любой вектор $\mathbf{Y}\in\{\mathbf{Y}_i\}_1^k$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{rank}\left\| \mathbf{Y} \,\vdots\, M^{-1}\mathbf{Y} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, M^{-m+1}\mathbf{Y} \right\|=m. \tag{2}$$

Без потери общности будем считать, что

$$E[\mathbf{Y}_1]=\mathbf{X}, \tag{3}$$

где $E$ — операция взятия среднего значения, и, следовательно, вектор $\mathbf{e}_1$ известен. Требуется на основании значений векторов $\{\mathbf{Y}_i\}_1^k$ и заданной матрицы $M$ получить оценку неизвестного вектора $\mathbf{X}$.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что в модели (1), наряду с искомым вектором $\mathbf{X}$, неизвестными являются и векторы $\{\mathbf{e}_i\}_2^k$. Чтобы разделить эти неизвестные, поступим следующим образом. Выберем в качестве оценок неизвестного вектора $\mathbf{X}$ векторы

$$\widetilde{\mathbf{X}}_i = A_i\mathbf{e}_i, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Тогда оценка среднего значения этих оценок будет иметь вид

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} A_i\mathbf{e}_i. \tag{5}$$

Введем функционал

$$V = \|\Delta\|^2, \tag{6}$$

где

$$\Delta^T = |(\widetilde{\mathbf{X}} - \widetilde{\mathbf{X}}_1)^T, \ldots, (\widetilde{\mathbf{X}} - \widetilde{\mathbf{X}}_k)^T|,$$

а $\|\cdot\|^2$ — евклидова норма вектора, и выберем в качестве оценок векторов $\{\mathbf{e}_i\}_2^k$ векторы $\{\widetilde{\mathbf{e}}_i\}_2^k$, доставляющие минимум этому функционалу. Введем обозначения:

$$\mathbf{e}^T = |\mathbf{e}_2^T, \ldots, \mathbf{e}_k^T|;$$

$$\underset{n\times k}{\mathbf{d}^T} = \left|\frac{1-k}{k}\mathbf{Y}_1^T, \frac{1}{k}\mathbf{Y}_1^T, \ldots, \frac{1}{k}\mathbf{Y}_1^T\right|;$$

$$B_j = \left\|\frac{1}{k}A_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \frac{1}{k}A_{j-1} \,\vdots\, \frac{1-k}{k}A_j \,\vdots\, \frac{1}{k}A_{j+1} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \frac{1}{k}A_k\right\|, \quad j = 1, \ldots, k;$$

$$B^T = \|B_1^T \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, B_k^T\|.$$

Тогда в силу (4)—(6) в принятых обозначениях вектор $\Delta$ запишется в виде

$$\Delta = B\mathbf{e} + \mathbf{d}.$$

Следовательно, задача определения вектора $\widetilde{\mathbf{e}}$, доставляющего минимум функционалу $V$, сводится к нахождению решения в смысле наименьших квадратов линейной системы

$$B\mathbf{e} = -\mathbf{d}, \tag{7}$$

удовлетворяющего системе линейных ограничений вида

$$|1, \ldots, 1|^T = C\mathbf{e}, \tag{8}$$

где

$$\underset{(k-1)\times[m(k-1)]}{C} = \left\|\begin{array}{c:c:c:c} 1\ldots 1 & 0 & & \\ & 1\ldots 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ & & & 1\ldots 1 \end{array}\right\|.$$

Как известно*, решение этой задачи может быть получено следующим образом. Обозначим через $e_0$ частное решение системы (8), а через $H$ — матрицу $[(k-1)m]\times[(m-1)(k-1)]$ такую, что $CH = 0$. Тогда общее решение системы (8) запишется в виде

$$\widetilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_0 + H\beta, \tag{9}$$

где $\beta$ — произвольный вектор размерности $(k-1)(m-1)$. Подставляя полученное решение в систему (7), будем иметь

$$-\hat{d} - Be_0 = BH\beta. \tag{10}$$

Обозначим решение системы методом наименьших квадратов через $\widetilde{\beta}$. Тогда искомое значение вектора $\widetilde{\mathbf{e}}$ запишется в виде

$$\widetilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_0 + H\widetilde{\beta}.$$

---

* **Рао С. Р.** Линейные статистические методы.— М.: Наука, 1968.

Покажем, что

$$\operatorname{rank}(BH) = (k-1)(m-1). \tag{11}$$

Так как согласно [*]

$$\operatorname{rank}(BH) = \operatorname{rank}\left\| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right\| - \operatorname{rank} C,$$

а в силу (8)

$$\operatorname{rank} C = k-1,$$

то для доказательства утверждения (11) достаточно показать, что

$$\operatorname{rank}\left\| \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \right\| = (k-1)\,m,$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ k-1\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \left\| \begin{array}{c:c:c:c} 1/k\ A_2 & (1-k)/k\ A_3 & \ldots & 1/k\ A_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/k\ A_2 & 1/k\ A_3 & & (1-k)/k\ A_k \\ \hdashline 1\ldots 1 & & & \\ & 1\ldots 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 1\ldots 1 \end{array} \right\|.$$

Из структуры последних $k-1$ строк этой матрицы следует, что любой столбец $i$-го блока линейно независим от столбцов всех остальных блоков. Следовательно, для линейной независимости столбцов рассматриваемой матрицы достаточно, чтобы имела место линейная независимость столбцов каждого блока. Так как в силу (1) столбцами каждой из матриц $A_i$ являются векторы

$$M^{p_{\min}}\mathbf{Y}_i,\ M^{p_{\min}+1}\mathbf{Y}_i,\ \ldots,\ M^{p_{\max}}\mathbf{Y}_i,$$

то, умножая их слева на невырожденную матрицу $M^{-p_{\max}}$, получим соответственно векторы

$$M^{-m+1}\mathbf{Y}_i,\ M^{-m+2}\mathbf{Y}_i,\ \ldots,\ \mathbf{Y}_i,$$

линейная независимость которых гарантируется условием (2). Следовательно, матрица системы (10) имеет полный ранг, и решение $\widetilde{\beta}$ единственно. Таким образом, решением поставленной задачи будет вектор

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \frac{1}{k}\| A_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A_k \| \left| \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_0 + H\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \end{matrix} \right|.$$

**Пример.** Рассмотрим эффективность предлагаемого метода на следующих модельных примерах. Пусть функции $\{X_i(z)\}_1^3$, подлежащие оцениванию, заданы на равномерной сетке со значениями

$$z = 1,\ 2,\ \ldots,\ 12.$$

Соответствующие значения этих функций представлены во 2, 3 и 4-й строках табл. 1. Их наблюдаемые значения

$$\{\{Y_{ij}(z)\}_{j=1}^{10}\}_{i=1}^{3}$$

для той же сетки значений аргумента были получены путем их сдвига по оси $z$ на величины, кратные шагу сетки $\Delta z = 1$, и прибавления значе-

Таблица 1

| $z$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1(z)$ | 0,5 | 1 | 0,5 | | | | | | | | | |
| $X_2(z)$ | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | | | | | | |
| $X_3(z)$ | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0,5 | 1 | 0,5 |

значениям дисперсии $\sigma^2$ случайной составляющей, приведены во 2, 3 и 4-й строках табл. 2.

Таблица 2

| $\sigma^2$ | 0,01 | 0,04 | 0,09 | 0,16 | 0,25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1(z)$ | 0,0032 | 0,013 | 0,031 | 0,062 | 0,092 |
| $X_2(z)$ | 0,0014 | 0,0073 | 0,024 | 0,054 | 0,095 |
| $X_3(z)$ | 0,00079 | 0,0039 | 0,0088 | 0,014 | 0,020 |

*Поступила в редакцию 19 апреля 1984 г.*

---

УДК 519.248

**В. Г. АЛЕКСЕЕВ**

*(Москва)*

# О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ИНТЕРВАЛА КОРРЕЛЯЦИИ ГАУССОВОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Различные определения интервала корреляции (ИК) стационарного случайного процесса и различные подходы к его оцениванию могут быть найдены в [1—5]. В статье [5], в частности, справедливо отмечается, что исследование свойств ИК является достаточно сложным вопросом, не нашедшим пока должного освещения в литературе. В той же работе построена асимптотически несмещенная и состоятельная непараметрическая оценка для квадратичного ИК (т. е. для одного из возможных определений ИК).

В настоящей работе будут даны четыре определения ИК для стационарного случайного процесса с дискретным временем. Поскольку обработка непрерывной реализации случайного процесса на цифровой ЭВМ неизбежно требует ее предварительной дискретизации, то предположение о дискретности исследуемого случайного процесса едва ли может рассматриваться как некое ограничение общности. Для всех четырех ИК будут предложены непараметрические оценки, которые (по крайней мере, в случае гауссового случайного процесса) отличаются высокой скоростью сходимости (при неограниченном возрастании объема выборки) к истинным значениям оцениваемых величин.

Итак, пусть $\{\xi(k),\ k=0,\ \pm1,\ \ldots\}$ — вещественный стационарный случайный процесс с нулевым средним, корреляционной функцией $R(k)=\mathbf{E}\xi(j+k)\xi(j)$, где $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания, и спект-