

Рис. 3.

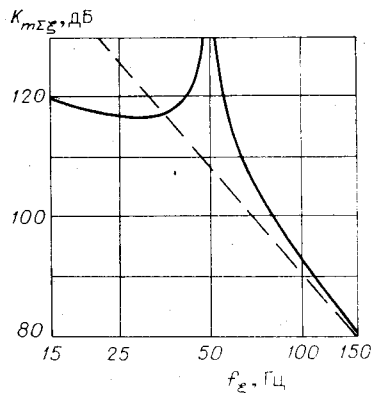


Рис. 4.

Использование способа позволяет получить высокие совокупные характеристики по быстродействию и устойчивости к аддитивным помехам с сосредоточенными частотами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. с. 703765 (СССР). Способ измерения напряжения/В. В. Шевчук.— Оpubл. в ОИПОТЗ, 1979, № 46.
2. А. с. 687608 (СССР). Устройство для измерения сигналов/В. В. Шевчук.— Оpubл. в ОИПОТЗ, 1979, № 35.
3. Шевчук В. В. Способ уменьшения аддитивной погрешности в измерительных устройствах.— Автометрия, 1979, № 4, с. 25—29.

Поступила в редакцию 26 августа 1982 г.

УДК 517.518.8

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ

(Новосибирск)

### ЧАСТОТНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ СГЛАЖИВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ

**1. Постановка задачи.** При сглаживании и дифференцировании экспериментальных данных широкое применение получили сглаживающие сплайны (СКС) [1, 2]. Для оценивания оптимального значения параметра сглаживания (минимизирующего среднеквадратическую ошибку сглаживания) предложены алгоритмы, работающие как при известных, так и при неизвестных дисперсиях погрешностей исходных данных [2, 3]. Однако еще остается ряд нерешенных вопросов, важных при практическом использовании СКС. Это прежде всего относится к сохранению в сплайне «тонких» структур приближаемой функции, что связано с разрешающей способностью СКС, и к определению числовых характеристик случайной составляющей ошибки вычисления функции и ее производных по построенному сплайну, которая обусловлена передачей в СКС погрешностей исходных данных.

В данной статье предлагается частотный подход, позволяющий не только решить задачу анализа точности сглаживания и дифференцирова-

$= f(t_j) + \xi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , где  $\xi_j$  — шум измерения с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_j^2$ . По этим значениям при выбранных краевых условиях и параметре сглаживания строится СКС  $S_{n,\alpha}(t)$  [1, 2], который используется для вычисления  $f(t)$  и ее производных  $f^{(k)}(t)$ . Ошибку вычисления  $k$ -й производной естественно ввести как  $\varepsilon_\alpha^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - S_{n,\alpha}^{(k)}(t)$  и представить в виде  $\varepsilon_\alpha^{(k)}(t) = b_\alpha^{(k)}(t) + \xi_\alpha^{(k)}(t)$ . Систематическая (неслучайная) составляющая  $b_\alpha^{(k)}(t)$  обусловлена эффектом сглаживания и определяется соотношением  $b_\alpha^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - \bar{S}_{n,\alpha}^{(k)}(t)$ , где  $\bar{S}_{n,\alpha}(t)$  — сплайн, построенный по точным значениям  $f(t_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Случайная составляющая  $\xi_\alpha^{(k)}(t) = \bar{S}_{n,\alpha}^{(k)}(t) - S_{n,\alpha}^{(k)}(t)$  характеризует проникновение шума измерения в  $S_{n,\alpha}^{(k)}(t)$ . Для вычисления количественных характеристик этих составляющих имеет смысл представить сплайн  $S_{n,\alpha}(t)$  как функцию на выходе некоторого фильтра, на вход которого поступает последовательность  $\{f_j\}$ , состоящая из измеренных значений. Сглаживающие свойства такого фильтра однозначно определяются его частотной характеристикой.

Для нахождения частотной характеристики будет использовано так называемое  $D$ -преобразование [4]. Так, если  $\{h_j\}$  есть некоторая последовательность с интервалом дискретизации  $T$ , то  $D$ -преобразование задается как

$$H_D(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \exp(-i\omega jT),$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Функция  $H_D(\omega)$  периодична с периодом  $2\pi/T$ . Другие свойства  $D$ -преобразования приведены в [4].

Построение частотной характеристики СКС будем осуществлять при следующих предположениях: 1) шаг сетки  $\{t_j\}$  одинаков и равен  $T$ ; 2) весовые множители  $p_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , входящие в функционал  $\sum_{j=0}^n p_j^{-1} (\tilde{f}_j - S_{n,\alpha}(t_j))^2$  [2], также одинаковы и в дальнейшем обозначаются как  $p$ . Первоначально определим связь между значениями  $\tilde{f}_j$  и вторыми производными  $M_j$  сплайна  $S_{n,\alpha}(t)$  в узлах  $t_j$ . За исключением двух первых и двух последних узлов, эта связь выражается разностным уравнением вида [2]

$$\beta M_{j-2} + \mu M_{j-1} + \lambda M_j + \mu M_{j+1} + \beta M_{j+2} = (\tilde{f}_{j+1} - 2\tilde{f}_j + \tilde{f}_{j-1})/T, \quad j = 2, \dots, n-2. \quad (1)$$

При предположениях 1, 2 коэффициенты этого уравнения равны

$$\beta = \alpha p/T^2; \quad \mu = T/6 - 4\alpha p/T^2; \quad \lambda = 2T/3 + 6\alpha p/T^2. \quad (2)$$

Уравнение (1) отражает структуру дискретного фильтра, преобразующего входную последовательность  $\{\tilde{f}_j\}$  в последовательность  $M_j$ . Такой дискретный фильтр удобно описывать частотной характеристикой  $H_D(\omega) = M_D(\omega)/\tilde{F}_D(\omega)$ , где  $M_D(\omega)$ ,  $\tilde{F}_D(\omega)$  —  $D$ -преобразования последовательностей  $\{M_j\}$ ,  $\{\tilde{f}_j\}$ . С учетом свойства  $D$ -преобразования для сдвинутых последовательностей (в уравнении (1) это  $M_{j-2}$ ,  $M_{j-1}$ ,  $M_{j+1}$ ,  $M_{j+2}$ ,  $f_{j-1}$ ,  $f_{j+1}$ ) [4, 5] имеем

$$H_D(\omega) = \frac{2}{T} \left[ \frac{\cos \omega T - 1}{\lambda + 2\mu \cos \omega T + 2\beta \cos 2\omega T} \right]. \quad (3)$$

На втором этапе построения частотной характеристики СКС рассмотрим преобразование дискретных значений  $M_j = S_{n,\alpha}^{(2)}(t_j)$  второй

производной в непрерывную функцию

$$S_{n,\alpha}^{(2)}(t) = M_{j-1} \frac{t_j - t}{T} + M_j \frac{t - t_{j-1}}{T},$$

что соответствует линейной интерполяции. Частотная характеристика такого преобразования определяется выражением [4]

$$H_n(\omega) = (\sin(\omega T/2)/\omega T/2)^2, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (4)$$

Для нахождения  $S_{n,\alpha}(t)$  остается выполнить двойное интегрирование, что соответствует линейному преобразованию с частотной характеристикой

$$H_{\text{инт}}(\omega) = 1/(i\omega)^2, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (5)$$

С учетом (3)–(5) частотная характеристика сглаживающего кубического сплайна представляется соотношением

$$H_\alpha(\omega) = \frac{2}{T\omega^2} \left( \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right)^2 \left[ \frac{1 - \cos \omega T}{\lambda + 2\mu \cos \omega T + 2\beta \cos 2\omega T} \right]_{-\infty < \omega < \infty}. \quad (6)$$

Заметим, что эта характеристика включает частотные искажения двух преобразований. Первое —  $\{f_j\} \rightarrow S_{n,\alpha}(t)$  — обуславливает точность воспроизведения функции  $f(t)$  сплайном  $S_{n,\alpha}(t)$ , и поэтому частотные искажения такого преобразования желательно сделать как можно меньше. Второе —  $\{\xi_j\} \rightarrow S_{n,\alpha}(t)$  — характеризует передачу ошибок измерения в сплайн  $S_{n,\alpha}(t)$ , и такую передачу желательно устранить вообще. Эти противоречивые требования разрешаются на этапе синтеза СКС в соответствии с заданными точностными характеристиками.

Для вычисления систематической ошибки приближения производных  $f^{(1)}(t)$ ,  $f^{(2)}(t)$  имеет смысл ввести в рассмотрение преобразования  $\{f_j^{(1)}\} \rightarrow S_{n,\alpha}^{(1)}(t)$ , где  $f_j^{(1)} = f^{(1)}(t_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\{f_j^{(2)}\} \rightarrow S_{n,\alpha}^{(2)}(t)$ . В силу линейности операции интегрирования частотные характеристики этих преобразований также выражаются соотношением (6).

Влияние шума на точность вычисления производных  $f^{(1)}(t)$ ,  $f^{(2)}(t)$  обусловлено преобразованиями  $\{\xi_j\} \rightarrow S_{n,\alpha}^{(1)}(t)$ ;  $\{\xi_j\} \rightarrow S_{n,\alpha}^{(2)}(t)$ . Из соотношений (3)–(5) непосредственно следуют частотные характеристики этих преобразований:

$$H_{1,\alpha}(\omega) = -\frac{2}{i\omega T} \left( \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right)^2 \left[ \frac{1 - \cos \omega T}{\lambda + 2\mu \cos \omega T + 2\beta \cos 2\omega T} \right]; \quad (7)$$

$$H_{2,\alpha}(\omega) = -\frac{2}{T} \left( \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right)^2 \left[ \frac{1 - \cos \omega T}{\lambda + 2\mu \cos \omega T + 2\beta \cos 2\omega T} \right]. \quad (8)$$

Заметим, что, положив в соотношениях (2)  $\alpha = 0$ , получим  $\beta = 0$ ,  $\mu = T/6$ ,  $\lambda = 2T/3$ , и выражения (6)–(8) при таких коэффициентах определяют уже частотные характеристики интерполяционного сплайна. Для преобразования  $\{f_j\} \rightarrow S_n(t)$  частотная характеристика интерполяционного сплайна была найдена в [6].

**3. Числовые характеристики ошибок сглаживания и дифференцирования.** Хотя приведенные в предыдущем разделе частотные характеристики полностью задают сглаживающие свойства СКС, для удобства анализа этих свойств необходимо ввести числовые характеристики систематической и случайной составляющих ошибок сглаживания и дифференцирования.

Если обозначить через  $F_D^{(k)}(\omega)$ ,  $k = 0, 1, 2$ ,  $D$ -преобразования последовательностей  $\{f_j^{(k)}\}$ , где  $f_j^{(k)}$  — точные значения  $f^{(k)}(t_j)$ , то  $k$ -я производная сплайна определяется обратным преобразованием Фурье:

$$\bar{S}_{n,\alpha}^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_\alpha(\omega) F_D^{(k)}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Хотя это соотношение и позволяет найти величину систематической ошибки  $b_{\alpha}^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - \bar{S}_{n,\alpha}^{(k)}(t)$ , его использование на практике ограничено из-за незнания точных значений  $f_j^{(k)}$ . Поэтому целесообразно величину систематической ошибки выразить косвенным образом через характеристики аппаратной функции  $h_{\alpha}(t)$  сплайна, связанной с частотной характеристикой  $H_{\alpha}(\omega)$  преобразованием Фурье:

$$h_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\alpha}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (9)$$

Понятие аппаратной функции широко используется в измерительной технике, и поэтому только заметим, что чем меньше ширина аппаратной функции, тем меньше систематическая ошибка  $b_{\alpha}^{(k)}(t)$  и выше разрешающая способность сглаживающего сплайна.

В качестве характеристик аппаратной функции рассмотрим ширину  $\delta_{\alpha}$  функции  $h_{\alpha}(t)$  на уровне 0,4 от максимального значения  $h_{\alpha}(0)$  и моменты  $m_{k,\alpha}$   $k$ -го порядка:

$$m_{k,\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} |h_{\alpha}(t)| |t|^k dt / \int_{-\infty}^{\infty} |h_{\alpha}(t)| dt.$$

Физическая трактовка этих характеристик предельно проста. При наличии в  $f^{(k)}(t)$  двух «тонких» структур (например, двух резких пиков) они проявятся в  $S_{n,\alpha}^{(k)}(t)$ , если расстояние между ними будет не менее  $\delta_{\alpha}$ . Вторая характеристика существенно зависит от протяженности «хвостов» аппаратной функции, и при  $k=2$  ее можно трактовать как «дисперсию» аппаратной функции. Для сглаживающих сплайнов эти характеристики имеют предельные значения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta_{\alpha} = \delta_0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} m_{k,\alpha} = m_{k,0}, \quad k = 0, 1, 2,$$

где  $\delta_0, m_{k,0}$  — характеристики интерполяционного кубического сплайна.

При определении количественных характеристик случайной составляющей  $\xi_{\alpha}^{(k)}(t)$  ошибки вычисления  $f^{(k)}(t)$  будем предполагать, что шум измерения имеет нулевое среднее и измерения равноточны, т. е. дисперсии шума измерения одинаковы и равны  $\sigma^2$ . Тогда  $M[\xi_{\alpha}^{(k)}(t)] = 0$  ( $M[\cdot]$  — оператор математического ожидания) и в качестве числовой характеристики этой составляющей можно принять корреляционную функцию  $r_{k,\alpha}(l) = M[\xi_{\alpha}^{(k)}(t) \xi_{\alpha}^{(k)}(t+l)]$ , которая при  $l=0$  определяет дисперсию  $\sigma_{k,\alpha}^2$ . Значения  $r_{k,\alpha}(l)$  вычисляются как

$$r_{k,\alpha}(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{k,\alpha}(\omega)|^2 \Gamma_D(\omega) \exp(i\omega l) d\omega, \quad (10)$$

где  $|H_{k,\alpha}(\omega)|^2$  — квадраты модулей частотных характеристик, задаваемых при  $k=0$  соотношением (6), а при  $k=1, 2$  выражениями (7), (8) соответственно;  $\Gamma_D(\omega)$  —  $D$ -преобразование дискретной корреляционной функции  $r_{\xi}(l) = M[\xi_j \xi_{j+l}]$  шума измерения.

Заметим, что при численном обращении (9), (10) используется дискретное преобразование Фурье и алгоритм быстрого преобразования Фурье [5].

Введем еще одну числовую характеристику, позволяющую выяснить предельные по точности возможности СКС. Анализ поведения  $\delta_{\alpha}$  и  $\sigma_{k,\alpha}^2$  при изменении  $\alpha$  показывает, что при  $\alpha \rightarrow 0$  улучшается разрешение сплайна, но увеличивается дисперсия  $\sigma_{k,\alpha}^2$ , и наоборот, при увеличении  $\alpha$  уменьшается дисперсия, но ухудшается разрешение. Эту характерную связь между  $\delta_{\alpha}$  и  $\sigma_{k,\alpha}^2$  удобно представить зависимостью  $\sigma_{k,\alpha}^2 = \varphi_k(\delta_{\alpha})$ ,  $k=0, 1, 2$ , которая в дальнейшем называется оперативной характери-

стикой сплайна и строится при фиксированной дисперсии шума изменением параметра  $\alpha$  от 0 до достаточно большого значения. Приняв фиксированное значение  $\delta_\alpha$  (например,  $\delta'_\alpha$ ), можно вычислить предельное значение дисперсии  $\varphi_k(\delta_\alpha)$ , меньше которой невозможно получить дисперсию  $\sigma_{k,\alpha}^2$  при принятом  $\delta'_\alpha$ .

Оперативная характеристика сглаживающего сплайна является монотонно убывающей функцией с предельными значениями

$$\lim_{\delta_\alpha \rightarrow \delta_0} \varphi_k(\delta_\alpha) = \sigma_{k,0}^2; \quad \lim_{\delta_\alpha \rightarrow \infty} \varphi_k(\delta_\alpha) = 0, \quad (14)$$

где  $\sigma_{k,0}^2$  — дисперсия вычисления  $k$ -й производной по интерполяционному сплайну.

**4. Синтез сглаживающего кубического сплайна.** Использование введенных в работе точностных характеристик  $\delta_\alpha$ ,  $\sigma_{k,\alpha}^2$  позволяет подойти к выбору параметра сглаживания, как к задаче построения (синтеза) сплайна с заданными точностными характеристиками.

Представляется полезным сформулировать задачу синтеза сглаживающего сплайна в виде следующих вариационных задач:

$$\inf_{\alpha > 0} \delta_\alpha \quad \text{при ограничении} \quad \sigma_{k,\alpha}^2 \leq \sigma_{k,\text{пр}}^2; \quad (12)$$

$$\inf_{\alpha > 0} \sigma_{k,\alpha}^2 \quad \text{при ограничении} \quad \delta_0 \leq \delta_\alpha \leq \delta_{\text{пр}}. \quad (13)$$

Свойства (11) оперативной характеристики СКС гарантируют единственность и существование решения задач (12), (13). Решение первой задачи дает сплайн с максимальным разрешением при ограниченном уровне дисперсии  $\sigma_{k,\alpha}^2$ . Решение задачи (13) минимизирует эту дисперсию при гарантированной величине разрешения СКС. Заметим, что нахождение параметра сглаживания  $\alpha$  из решения вариационных задач (12), (13) наполняет задачу выбора параметра  $\alpha$  содержательным (для пользователя) смыслом и позволяет пользователю интерпретировать результаты сглаживания и дифференцирования в терминах теории измерительных систем, используя понятия аппаратной функции, частотной характеристики, полосы пропускания и т. д.

**5. Результаты вычислительного эксперимента.** В качестве иллюстрации предлагаемого подхода к синтезу СКС рассмотрим некоторые результаты вычислительного эксперимента.

Функция  $f(t)$  задавалась выражением

$$f(t) = 0,75 \exp(-100(2x-1)^2) + 0,25(1 - (2x-1)^2).$$

Измеренные значения этой функции определялись соотношением  $f_j = f(t_j) + \xi_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 60$ ,  $t_j = j/60$ , где  $\xi_j$  — шум измерения с дисперсией  $\sigma^2$ . Величина  $T = 0,0166$ . На рис. 1 представлены частотные характеристики интерполяционного и сглаживающего сплайнов, построенных при оптимальном параметре сглаживания и дисперсиях  $\sigma^2 = 2,2 \cdot 10^{-5}$  (относительный уровень шума 1%),  $\sigma^2 = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$  (уровень шума 10%), а на рис. 2 даны соответствующие этим характеристикам функции  $h_\alpha(t)$ .

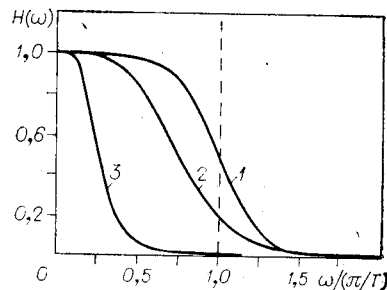


Рис. 1. Частотные характеристики кубических сплайнов:

1 — интерполяционный сплайн ( $\alpha = 0$ ); 2 — сглаживающий сплайн, построенный при  $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$  ( $\sigma^2 = 2,2 \cdot 10^{-5}$ ); 3 — сглаживающий сплайн, построенный при  $\alpha = 0,5$  ( $\sigma^2 = 2,2 \cdot 10^{-3}$ ).

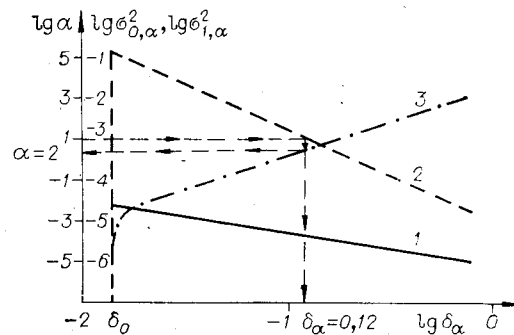
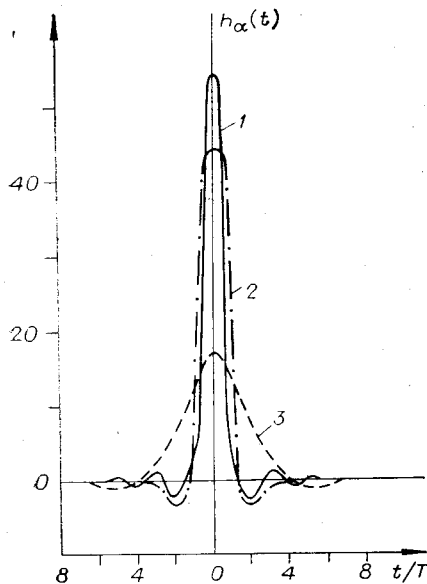


Рис. 3. Оперативные характеристики сглаживающего сплайна ( $\sigma^2 = 2,2 \cdot 10^{-5}$ ):

1 —  $\sigma_{0,\alpha}^2 = \varphi_0(\delta_\alpha)$ ; 2 —  $\sigma_{1,\alpha}^2 = \varphi_1(\delta_\alpha)$ ; 3 — параметр сглаживания  $\alpha$ .

Рис. 2. Аппаратные функции кубического сплайна.

Нумерация 1—3 соответствует рис. 1.

На рис. 3 показаны оперативные характеристики СКС — функции  $\varphi_h(\delta_\alpha)$ , построенные при  $\sigma^2 = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-5}$ . На этом же рисунке приведены значения параметра  $\alpha$ , при которых строились оперативные характеристики.

Рассмотрим использование оперативной характеристики  $\varphi_1(\delta_\alpha)$  для анализа и синтеза СКС. Отложив оптимальное значение параметра сглаживания  $\alpha = 7 \cdot 10^{-3}$  по оси  $\lg \alpha$  рис. 3, находим ширину аппаратной функции  $\delta_\alpha = 1,9 \cdot 10^{-2}$ , что обеспечивает хорошее воспроизведение «тонких» структур в  $f^{(1)}(t)$  и  $\sigma_{1,\alpha}^2 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ . Если необходимо уменьшить величину дисперсии (например, до величины не более  $10^{-3}$ ), то выбрать параметр  $\alpha$  можно из решения задачи (12), задав  $\sigma_{1,\text{пр}}^2 = 10^{-3}$ . Графическое решение этой задачи показано на рис. 3 (штриховые линии). Отложив по оси  $\lg \sigma_{1,\alpha}^2$  значение  $\sigma_{1,\text{пр}}^2$ , по оперативной характеристике  $\varphi_1(\delta_\alpha)$  находим  $\delta_\alpha = 0,12$ ,  $\alpha = 2,0$ . Очевидно, что в построенном при  $\alpha = 2,0$  сплайне сгладятся «тонкие» структуры, размеры которых меньше  $\delta_\alpha$ , но хорошо проявятся (за счет уменьшения уровня случайной составляющей  $\xi_\alpha^{(1)}(t)$ ) низкочастотные составляющие производной  $f^{(1)}(t)$ .

В заключение заметим, что предлагаемый частотный подход к анализу и синтезу сплайн-приближений легко распространяется и на другие виды сплайнов (параболические, дискретные [1]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.
2. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седелников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике.— Новосибирск: Наука, 1984.
3. Воскобойников Ю. Е. Построение сглаживающих кубических сплайнов при машинной обработке результатов эксперимента.— Автометрия, 1979, № 4, с. 110—117.
4. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем.— М.: Физматгиз, 1963.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.— М.: Мир, 1978.
6. Horowitz L. L. The effects of spline interpolation on power spectral density.— IEEE Trans. on ASSP, 1974, v. ASSP-22, N 1, p. 22—27.

Поступила в редакцию 26 марта 1985 г.