АКАДЕМИЯ НАУК СССР

УДК 519.22

В. Г. АЛЕКСЕЕВ
(Москва)

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ СВЕРХРАЗРЕШАЮЩИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

В работе [1], посвященной прикладному спектральному анализу стационарных случайных процессов, построены оценки $f_k(\omega)$, $k=1, 2, \ldots$, смещение которых оказывается заметно меньшим, чем у большинства других оценок спектральной плотности, традиционно применяемых на практике. Кроме того, предложена сверхразрешающая оценка $\tilde{f}_2(\omega)$, позволяющая получить более рельефную (по сравнению с традиционно применяемыми оценками) картину основных особенностей спектральной плотности исследуемого случайного процесса.

В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть ряд вопросов, относящихся к непараметрическому оцениванию спектральных плотностей случайных процессов, и дать краткий обзор приемов, используемых разными авторами для улучшения качества оценивания. В дальнейшем качество той или иной оценки спектральной плотности будем связывать со средним квадратом ошибки оценивания, равным сумме дисперсии оценки и квадрата ее смещения.

Итак, пусть $\{\xi_k,\ k=0,\ \pm1,\ \ldots\}$ — стационарный случайный процесс со средним значением 0 и спектральной плотностью $f(\lambda), \lambda \in \Pi = (-\pi, \pi]$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что функция $f(\lambda)$, продолженная периодическим образом за пределы интервала Π, является достаточно гладкой функцией, т. е. имеющей производные достаточно высоких порядков. Оценку значения функции $f(\lambda)$ в некоторой точке $\omega \in [0, \pi]$ по реализации x_k, $k=\overline{1, n}$, случайного процесса ξ_k будем искать в виде

$$f_n(\omega) = \max\left[h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{\lambda-\omega}{h}\right) I_n(\lambda)\, d\lambda, 0\right], \tag{1}$$

где $I_n(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$,— периодограмма, определяемая соотношением

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k e^{-ik\lambda}\right|^2, \tag{2}$$

$h=h(n)>0$, а функция $w(x)$ четна и удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, dx = 1,\ \ G(w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x)\, dx < \infty. \tag{3}$$

Кроме того, предположим в дальнейшем, что

$$w(x) = 0, \quad \text{если} \quad |x| \geqslant 1. \tag{4}$$

Предположение (4), не будучи строго обязательным при построении оценки (1), удобно с той точки зрения, что оно позволяет экономить время счета при вычислении спектральных оценок.

Если предположить дополнительно, что $h \leqslant \pi$, то оценка (1) преобразуется к виду

$$f_n(\omega) = \max\left[h^{-1}\int_{-\pi}^{2\pi} w\left(\frac{\lambda-\omega}{h}\right) I_n(\lambda)\,d\lambda,\ 0\right]. \qquad (5)$$

Функция $w(x)$ называется обычно весовой функцией оценки (5), а функция $\varphi(\lambda) = h^{-1}w(\lambda/h)$ — отвечающим ей спектральным окном.

Четное число r назовем порядком весовой функции $w(x) = w_r(x)$, если, наряду с (3) и (4), выполняются дополнительные условия $G_j(w_r) = 0$, $j = \overline{1, r-1}$, и $G_r(w_r) \neq 0$, где

$$G_j(w) = \int_{-1}^{1} x^j w(x)\,dx, \qquad j = 0, 1, \ldots .$$

В случае $r = 2$ функция $w(x) = w_2(x)$ может быть как неотрицательной, так и знакопеременной. Простейшие весовые функции $w(x)$ 2-го порядка могут быть найдены в [2, § 18; 3]. Для $r > 2$ функция $w_r(x)$ будет обязательно знакопеременной. С учетом этого обстоятельства, во избежание появления отрицательной оценки спектральной плотности, и строим оценку функции $f(\lambda)$ в виде $\max[\cdot, 0]$. Весовые функции $w_r(x)$ порядков $r = 4, 6, \ldots, 20$ можно обнаружить в работах [4, 5].

Смысл применения весовой функции $w(x)$ порядка $r > 2$ состоит в том, что она устраняет смещение оценки (5), возникающее за счет всех производных $f^{(\nu)}(\lambda)$, где ν четно, $\nu < r$. Теоретические расчеты (см., например, [4, 6, 7]) свидетельствуют о том, что при достаточно больших n может быть достигнут очень большой выигрыш в точности за счет применения весовых функций высших порядков (т. е. порядков $r > 2$). При этом с ростом n растет как порядок r оптимальной весовой функции $w(x)$, так и достигаемый с ее помощью выигрыш в точности. Экспериментальное опробование различных методов оценивания спектральной плотности на искусственно моделируемых реализациях случайных процессов (см., например, [5, 8—10]) подтверждает этот теоретический вывод. Заметный выигрыш в точности за счет применения весовых функций высших порядков достигается уже при $n = 2^{13}$ [8] и тем более при $n = 2^{16}$, 2^{19} и 2^{22} [5, 9]. В то же время применение знакопеременных весовых функций при $n = 2^{11}$ (и тем более при $n < 2^{11}$) требует большой осторожности. Заметим попутно, что при фиксированном n каждый переход к весовой функции $w(x)$ более высокого порядка (т. е. переход от r к $r+2$) сопровождается возрастанием оптимального значения масштабного множителя h. Разумеется, применение весовых функций высших порядков теряет смысл в тех случаях, когда нет оснований предполагать, что спектральная плотность $f(\lambda)$ является достаточно гладкой функцией.

Предложенный в работе [1] прием, направленный на уменьшение смещения оценки спектральной плотности, по существу представляет собой применение весовых функций $w(x)$ порядков $r > 2$.

Рассмотрим теперь несколько подробнее оценки, названные в [1] сверхразрешающими. Речь идет об оценках, обладающих тем свойством, что локальные экстремумы их математического ожидания выражены сильнее, чем у самой спектральной плотности $f(\lambda)$. Использование таких оценок имеет смысл в тех случаях, когда нас интересуют лишь основные характерные черты исследуемого спектра. Для построения сверхразрешающей оценки $f_n(\omega)$ достаточно взять весовую функцию $w(x)$ такую, что $G_{2k}(w) < 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Если в некоторой точке $\omega \in [0, \pi]$ достигается, например, локальный максимум функции $f(\lambda)$ и $f'(\omega) = \ldots = f^{(2k-1)}(\omega) = 0$, $f^{(2k)}(\omega) < 0$, где k — некоторое натуральное число, то при не слишком малых n и не слишком больших h

$$\mathbf{E}f_n(\omega)-f(\omega)\approx$$
$$\approx f^{(2k)}(\omega)h^{2k}G_{2k}(w)/2k)!>0.$$

Здесь $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания. Достигнутый эффект сверхразрешения по частоте обеспечивается за счет существенного увеличения дисперсии оценки, которая при не слишком малых n описывается приближенным равенством

№ п/п	$w(x)$	$G_2(w)$	$G(w)$
1	$(3/4)\,(1-x^2)$	0,2	0,60
2	$(15/32)\,(3-10x^2+7x^4)$	0	1,25
3	$(3/16)\,(11-46x^2+35x^4)$	—0,2	2,60
4	$(15/64)\,(13-62x^2+49x^4)$	—0,5	5,94
5	$(15/16)\,(5-26x^2+21x^4)$	—1	15,00

$$\mathbf{D}f_n(\omega)\approx\begin{cases}2\pi f^2(\omega)\,G(w)/nh, & \omega\neq 0,\pi;\\ 4\pi f^2(\omega)\,G(w)/nh, & \omega=0,\pi.\end{cases}$$

Это утверждение наглядно иллюстрируется таблицей, в которой приведены значения величин $G_2(w)$ и $G(w)$ для пяти весовых функций $w(x)$, три из которых являются сверхразрешающими. Значения функций $w(x)$ даны в таблице лишь для интервала $(-1,\ 1)$, вне которого все они обращаются в нуль.

Пример. Предположим, что в некоторой окрестности точки $\omega\in\in[0,\pi]$ функция $f(\lambda)$ имеет вид $f(\lambda)=f(\omega)-C|\lambda-\omega|^\alpha$, где $C>0$ и $0<\alpha\leqslant 1$ (здесь функция $f(\lambda)$ уже не дифференцируема в точке $\lambda=\omega$). В этом случае при не слишком малых n и не слишком больших h

$$\mathbf{E}f_n(\omega)-f(\omega)\approx h^{-1}\int_{-\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\lambda-\omega}{h}\right)[f(\lambda)-f(\omega)]\,d\lambda=-Ch^{-1}\int_{-\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\lambda-\omega}{h}\right)\times$$
$$\times|\lambda-\omega|^\alpha d\lambda, \tag{6}$$

причем правая часть соотношения (6) будет снова положительной, если $\alpha>\alpha_0$, где $\alpha_0=5/6$, $4/9$ и $1/4$ для весовых функций $w(x)$, приведенных в таблице под номерами 3—5.

Еще один прием, используемый многими авторами, состоит в том, что в качестве основы для построения оценки $f_n(\omega)$ используется не периодограмма (2), а модифицированная периодограмма

$$I_n^{\{B\}}(\lambda)=\left|\sum_{k=1}^{n}x_kb_ke^{-ik\lambda}\right|^2\Bigg/2\pi\sum_{j=1}^{n}b_j^2,\quad -\infty<\lambda<\infty.$$

Здесь $B=\{b_k,\ k=\overline{1,n}\}$ — так называемое окно данных, используемое для домножения (неравномерного взвешивания) реализации x_k, $k=\overline{1,n}$. Последовательность b_k чаще всего плавно убывает от середины отрезка реализации к его краям, чем достигается сглаживание краев реализации. Большое число разнообразных окон данных B может быть найдено в монографиях [11—13]. Полагая, в частности, $B_0=\{b_k\equiv 1,\ k=\overline{1,n}\}$, снова приходим к периодограмме (2).

Применение сглаживающих окон данных $B\neq B_0$ диктуется чаще всего стремлением уменьшить смещение периодограммы (2), рассматриваемой в качестве оценки спектральной плотности. Однако обусловленное этим смещением смещение оценки $f_n(\omega)$ обычно (при разумном выборе величины h) не является главным членом смещения рассматриваемой оценки (см., например, [6]). Кроме того, введение окна данных $B\neq B_0$ неизбежно увеличивает дисперсию оценки спектральной плотности. В силу этих причин нет оснований ожидать, что применение того или иного сглаживающего окна B приведет к резкому уменьшению ошибки оценивания. Численные эксперименты, проведенные автором настоящей статьи на относительно коротких реализациях случайных процессов (один из них, в частности, описан в работе [10]), свидетельствуют о том, что некоторый (сравнительно совсем небольшой) выигрыш в точности может быть в отдельных случаях достигнут, если глубина сглаживания (т. е. доля отсчетов у краев реализации, подвергаемых неравномерному взвешиванию) не превосходит 10% от общего объема выборки.

Легко может быть, однако, указан случай, когда следует ожидать гораздо большего эффекта от применения окон данных B, уменьшающих смещение периодограммы. Речь идет о том случае, когда в нашем распоряжении имеется несколько независимых реализаций исследуемого фиксированной длины. С ростом объема выборки n или числа независимых реализаций смещение этой периодограммы *не убывает*. Если оно становится сравнимым со смещением, вызываемым свертыванием периодограммы со спектральным окном $\varphi_n(\lambda)=h^{-1}w(\lambda/h)$, то уменьшение смещения периодограммы может существенно улучшить качество оценки функции $f(\lambda)$.

Подводя итог известным в настоящее время теоретическим и экспериментальным результатам, можем утверждать, что непараметрическое оценивание спектральных плотностей случайных процессов является большим искусством. Возможность домножения исходной реализации на то или иное окно данных B, а также использования различных весовых функций $w(x)$ и различных значений масштабного множителя h обеспечивает непараметрическому спектральному анализу большую гибкость. Применение различных окон данных B и весовых функций $w_r(x)$ порядков $r>2$ может в определенных условиях привести к очень большому выигрышу в точности. Однако при их использовании следует сохранять чувство меры. Не следует ожидать, что более глубокое сглаживание реализации или увеличение порядка r весовой функции при всех условиях позволит уменьшить ошибку оценивания. Лишь с годами приобретаемый опыт позволяет исследователю нащупать именно те параметры оценки спектральной плотности, которые при заданных условиях (объем выборки, предполагаемая степень гладкости функции $f(\lambda)$ и некоторые другие) обеспечат достаточно высокое качество оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кулешов Е. Л.** Непараметрические спектральные оценки с высоким разрешением.— Автометрия, 1984, № 2, с. 17—23.
2. **Яглом А. М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
3. **Журбенко И. Г., Кожевникова И. А.** О сравнительных характеристиках статистик спектральных плотностей стационарных случайных процессов.— ППИ, 1982, т. 18, № 1, с. 64—77.
4. **Алексеев В. Г.** Некоторые практические рекомендации по спектральному анализу гауссовских стационарных случайных процессов.— ППИ, 1973, т. 9, № 4, с. 42—48.
5. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема.— ППИ, 1980, т. 16, № 1, с. 42—49.
6. **Алексеев В. Г.** О равномерной сходимости оценок спектральной плотности гауссовского стационарного случайного процесса.— Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, № 1, с. 198—205.
7. **Алексеев В. Г.** Некоторые вопросы спектрального анализа гауссовских случайных процессов.— В кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 10. Киев: Вища школа, 1974, с. 3—11.
8. **Алексеев В. Г.** Об одном численном эксперименте по вычислению спектров случайных процессов.— ППИ, 1975, т. 11, № 4, с. 106—108.
9. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектральных плотностей случайных процессов по выборкам большого объема.— В кн.: Вычислительная и прикладная математика, вып. 44. Киев: Вища школа, 1981, с. 32—40.
10. **Alekseev V. G.** On the use of alternating kernels in nonparametric statistical estimation.— In: Lecture Notes in Mathematics, v. 1021. Berlin — Heidelberg — New-York-Tokyo: Springer-Verlag, 1983, p. 15—25.

11. **Koopmans L. H.** The spectral analysis of time series.— N. Y.: Academic Press, 1974.
12. **Bloomfield P.** Fourier analysis of time series: an introduction.— N. Y.: John Wiley, 1976.
13. **Бриллинджер Д.** Временные ряды. Обработка данных и теория.— М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 18 декабря 1984 г.

УДК 519.241.5

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ских систем часто результат эксперимента может быть представлен в виде графика значений одной изучаемой величины (функции), соответствующих некоторым равноотстоящим значениям другой (аргумента). Если при этом наблюдаемые значения функции содержат большую случайную составляющую, то самым простым средством борьбы с ней является многократное повторение эксперимента и последующее усреднение наблюдений, соответствующих одним и тем же значениям аргумента.

Однако в ряде случаев дело осложняется тем, что значения изучаемой функции, получаемые при повторных экспериментах и соответствующие одним и тем же значениям аргумента, отличаются не только за счет случайной составляющей. Из-за невозможности точной фиксации всех условий эксперимента отдельные графики могут, например, оказаться сдвинутыми вдоль оси значений аргумента. Подобная ситуация возникает при построении постстимульных гистограмм нейронных реакций, когда величина латентного периода при повторных стимуляциях не остается постоянной.

В этих условиях информация о количестве и относительном расположении точек максимума и минимума в исследуемой реакции содержится в каждой реализации. Однако попытка избавиться от случайной составляющей путем обычного усреднения может привести к тому, что она будет частично или полностью утеряна.

Так как деформации реакций, получаемых в повторных экспериментах, известны с точностью до параметра (величина сдвига), то эта априорная информация может быть использована для повышения точности оценивания среднего значения любой из наблюдаемых реакций.

Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в переборе всех возможных комбинаций сдвигов отдельных реакций с целью отыскания такой, при которой дисперсия сдвинутых реакций достигает минимума. Очевидно, что при большом их числе этот подход приводит к необходимости перебора огромного (m^k, где m — число сдвигов каждой реакции, k — число реакций) числа вариантов.

Другой подход сводится к постановке данной задачи как задачи оценивания, в которой неизвестные параметры — искомая реакция и величины сдвигов ее наблюдаемых реализаций. Обычным при решении таких задач является использование метода максимального правдоподобия. Однако в нашем случае применение этого метода оценивания потребует нахождения глобального максимума нелинейной функции от $n+k$ (n — число отсчетов времени, в которых наблюдается реакция) аргументов.

Очевидно, что численное решение этой задачи при больших значениях n и k и при отсутствии уверенности в единственности точки мак-