

В ТЕНЗОРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ И НОВЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Введение. При решении многих практических задач в области цифровой обработки двумерных сигналов, преимущественно изображений, спектральный анализ, основанный на методах дискретного преобразования Фурье (ДПФ), занимает важное значение. Например, двумерное ДПФ используется для эффективной реализации вычисления двумерной свертки в задачах цифровой фильтрации и реставрации изображений [1, 2].

Многие способы вычисления двумерного ДПФ (ДДПФ) основаны на свойстве разложимости последнего на одномерные преобразования Фурье [2, 3]. В силу такой факторизации вычисления ДДПФ осуществляют сначала по каждой строке исходной матрицы, представляющей входной сигнал, а затем по каждому столбцу полученной матрицы.

В данной работе предложен новый способ реализации вычисления ДДПФ дискретных сигналов с помощью построения соответствующего тензора третьего ранга. Показаны преимущества такого способа по отношению к указанным по основным характеристикам — количеству операций комплексных умножений, точности и объему рабочей памяти, необходимой при вычислении. На основе тензорного представления спектра сигнала найдена система ортогональных функций, принимающих в каждой точке вещественные значения $-1, 0, 1$ и составляющих базис в пространстве сигналов, размерности которых являются произвольными степенями двойки.

Тензорное представление фурье-спектра. Рассмотрим произвольный массив $\{f_{n,k}\}$, описывающий дискретный сигнал, размеры которого для простоты изложения будем считать равными, т. е. $n, k = 1 \div N$ для некоторого целого числа N . Преобразование Фурье исходного сигнала в каждой точке (p, s) с точностью до нормировочного множителя спектра

$$F_{p,s} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N f_{n,k} W^{np+ks}, \quad (1)$$

где $W = W_N = \exp(2\pi i/N)$.

Для произвольных значений $p, s, t = 1 \div N$ определим множества

$$V_{p,s,t} = \{(n, k); n, k = 1 \div N, np + ks = t \pmod{N}\} \quad (2)$$

и

$$f_{p,s,t} = \sum_{V_{p,s,t}} f_{n,k} \quad (3)$$

Тогда в силу (2) и (3) в произвольной точке (p, s) спектра имеем

$$F_{p,s} = \sum_{t=1}^N f_{p,s,t} W^t. \quad (4)$$

Таким образом, введение тензора 3-го ранга $\{f_{p,s,t}; p, s, t = 1 \div N\}$ по формуле (3) позволяет представить значение спектра в произвольной точке (p, s) в виде следующего N -мерного вектора:

$$\bar{F}_{p,s} = (f_{p,s,1}, f_{p,s,2}, \dots, f_{p,s,N}). \quad (5)$$

Очевидно, что такое тензорное представление спектра взаимно однозначно и обладает следующим свойством. Обозначим через \bar{l} для любого

целого $l \neq N$ число $l \pmod{N}$ и $\bar{N} = N$, тогда для любых p, s и k имеем

$$F_{\overline{kp}, \overline{ks}} = \sum_{t=1}^N f_{p,s,t} W^{tk}. \quad (6)$$

Действительно, в силу определений (2) и (3), а также свойства периодичности ДДПФ

$$\sum_{t=1}^N f_{p,s,t} W^{tk} = \sum_{t=1}^N \left(\sum_{V_{p,s,t}} f_{n,m} \right) W^{tk} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N f_{n,m} W^{(np+ms)k} = F_{kp, ks} = F_{\overline{kp}, \overline{ks}},$$

так как для фиксированных (p, s) множества $V_{p,s,t}$ разбивают область определения сигнала $X_N = \{(n, m); n, m = 1 \div N\}$ так, что

$$X_N = \bigcup_{t=1}^N V_{p,s,t}, \quad V_{p,s,t} \cap V_{p,s,t_1} = \emptyset, \quad t \neq t_1.$$

Формула (6) означает, что для фиксированных значений (p, s) по компонентам $f_{p,s,1}, f_{p,s,2}, \dots, f_{p,s,N}$ тензора преобразованием Фурье можно получить спектр в точках вида $(\overline{kp}, \overline{ks})$, которые составляют циклическую группу $T_{p,s}^N$ с образующей (p, s) , т. е.

$$T_{p,s}^N = \{(\overline{kp}, \overline{ks}); k = 1 \div N\}. \quad (7)$$

Например, пусть $N = 8$, тогда для $(p, s) = (1, 1)$ по компонентам $f_{p,s,t}, t = 1 \div N$, получим значения спектра сигнала в точках $(1, 1), (2, 2), \dots, (8, 8)$, а для $(p, s) = (1, 2)$ — в точках $(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 2), (6, 4), (7, 6), (8, 8)$.

Пусть, например, N является некоторой степенью 2, тогда, осуществляя процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ) над последовательностью $f_{p,s,1}, \dots, f_{p,s,N}$, определим значения спектра в точках из группы $T_{p,s}^N$, выполняя при этом примерно $0,5 N \log_2 N$ операций комплексных умножений на поворачиваемые множители, т. е. в среднем на одну точку из группы $T_{p,s}^N$ приходится

$$0,5 N \log_2 N / \text{card } T_{p,s}^N \quad (8)$$

операций умножений; card — обозначение мощности (порядка) группы. Если p, s и N не имеют общих делителей, то $\text{card } T_{p,s}^N = N$, поэтому в каждой точке вида $(\overline{kp}, \overline{ks})$ для таких (p, s) спектр вычисляется с помощью $0,5 \log_2 N$ операций комплексных умножений, как и в случае одномерного БПФ. Необходимо отметить, что существующие двумерные алгоритмы БПФ требуют в 2 раза больше аналогичных операций [2, 3].

Способ вычисления ДДПФ. Покажем, как можно использовать формулу (6) для эффективного в смысле быстродействия вычисления полного спектра сигнала. Очевидно, для этого необходимо оптимальным образом выбирать исходные точки (p, s) спектра, чтобы соответствующие группы $T_{p,s}^N$ заполняли плоскость X_N спектра с минимальными пересечениями в совокупности. Действительно, легко показать, что для чисел N , являющихся степенями 2, не существует такого покрытия плоскости X_N спектра, что

$$X_N = \bigcup_{(p,s) \in J} T_{p,s}^N, \quad (9)$$

где J — некоторое множество в X_N , а $T_{p,s}^N \cap T_{p_1,s_1}^N = (N, N)$ для произвольных $(p, s) \neq (p_1, s_1)$ из множества J .

С другой стороны, для простых N такое покрытие существует. Например, легко убедиться, что в качестве такого множества J можно взять

$$J_p = \{(1, p); p = 1 \div N\} \cup (N, 1). \quad (10)$$

Для чисел N , являющихся степенями 2, можно доказать, что достаточно рассматривать множество

$$J_r = \{(1, p); p = 1 \div N\} \cup \{(2k, 1); k = 1 \div N/2\}, \quad (11)$$

мощность которого $\text{card } J_r = 3N/2$.

Таким образом, в силу (6), (9), (10) и (11) получаем, что спектр исходного двумерного сигнала можно полностью определить с помощью $3N/2$ процедур одномерного преобразования Фурье для чисел N , равных степени 2, а для простых чисел N необходимо реализовать таких процедур $N+1$ раз. Существующие же способы вычисления ДДПФ при факторизации преобразования выполняют $2N$ аналогичных процедур [2—4].

Далее, определение спектра предлагаемым тензорным способом осуществляется в каждой точке сразу после вычисления соответствующих компонент тензора, и поэтому никакой дополнительной рабочей памяти для вычисления ДДПФ не требуется. С другой стороны, известные способы вычисления ДДПФ формируют спектр постепенно, осуществляя одномерное ДПФ сначала по всем строкам матрицы исходного сигнала, а затем по столбцам матрицы преобразованного сигнала, и поэтому требуют наличия дополнительной рабочей памяти для записи и хранения результата преобразования на каждом этапе, которая в объеме в несколько раз превышает объем памяти для исходного сигнала. При этом необходимо отметить, что такие способы ДДПФ выполняют транспонирование преобразованной по строкам исходной матрицы в рабочей памяти, что при больших размерах матрицы существенно увеличивает время вычисления [2].

Система ортогональных функций. Рассмотрим систему ортогональных функций, соответствующую тензору 3-го ранга $\{f_{p,s,t}; p, s, t = 1 \div N\}$, представляющему фурье-спектр исходного сигнала $\{f_{n,k}; n, k = 1 \div N\}$.

Так как в силу определения (4)

$$F_{p,s} = \sum_{t=1}^N f_{p,s,t} W^t \quad (12)$$

и $W^{t+N/2} = -W^t$ для произвольных $t = 1 \div N/2$ при четном N , то в экспоненциальном базисе $\{W^1, W^2, \dots, W^{N/2}\}$ имеем следующее разложение спектра в каждой точке (p, s) в виде $N/2$ -мерного вектора:

$$\bar{F}'_{p,s} = (f'_{p,s,1}, f'_{p,s,2}, \dots, f'_{p,s,N/2}), \quad (13)$$

где для

$$t = 1 \div N/2 \quad f'_{p,s,t} = f_{p,s,t} - f_{p,s,t+N/2}.$$

Число c_N непустых множеств $V_{p,s,t}$ для $p, s, t = 1 \div N$ есть число порядка N^3 , причем $c_N < 7N^3/8$ для четных N . Поэтому формулы (15) составляют $0,5c_N$ линейных равенств, определяющих все компоненты тензора $\{f'_{p,s,t}\}$.

Так как обратное преобразование Фурье существует, то совокупность линейных уравнений

$$\{f'_{p,s,t} = f_{p,s,t} - f_{p,s,t+N/2}; p, s = 1 \div N, t = 1 \div N/2\} \quad (14)$$

является разрешимой системой $0,5c_N$ линейных уравнений относительно N^2 независимых переменных $f'_{p,s,t}$. Поэтому имеет смысл рассмотреть N^2 независимых компонент тензора, по которым последний, а значит, и спектр полностью определяются.

Функции $\chi'_{p,s,t}$, преобразующие исходный массив $\{f_{n,k}\}$ сигнала в совокупность из N^2 независимых компонент тензора, легко построить. Для этого необходимо сначала построить функции $\chi_{p,s,t}$, с помощью которых находятся все несовпадающие (в количестве $2N^2$) компоненты

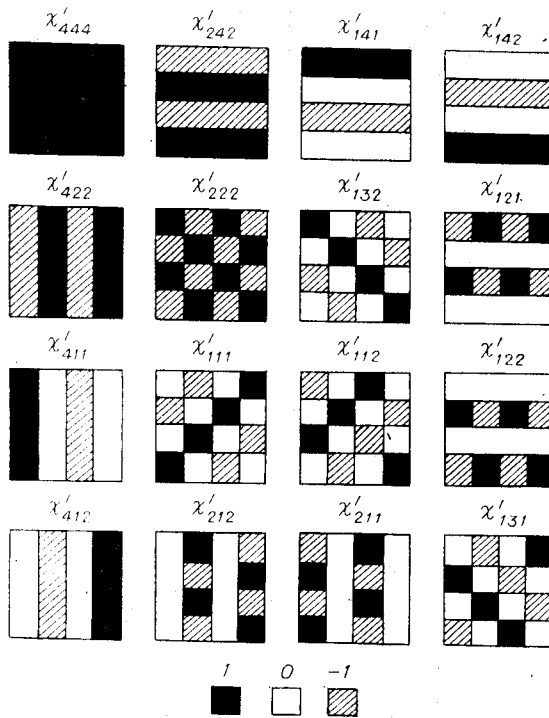


Рис. 1.

$f_{p,s,t}$, а затем по формуле

$$\chi'_{p,s,t} = \chi_{p,s,t} - \chi_{p,s,t+N/2}, \quad t = 1 \div N/2, \quad (15)$$

определяются необходимые функции $\chi'_{p,s,t}$.

На рис. 1 и 2 показаны данные функции для $N=4$. Ниже будет доказано, что такие функции χ' составляют ортогональную систему в пространстве действительных сигналов с размерностями $N \times N$ для произвольных N , являющихся степенью 2.

Интересно отметить, как это легко видеть из рис. 1, что данная система ортогональных функций не является факторизуемой, т. е. соответствующее ортогональное преобразование не разлагается на произведение двух одномерных, и тем самым отличается от традиционно применяемых двумерных ортогональных преобразований таких, как преобразования Фурье, Уолша, Хаара, Радемахера и т. д.

Далее, эюры такой системы ортогональных функций составляют ортогональную матрицу размерами $N^2 \times N^2$, поэтому обратная к ней матрица также задает систему ортогональных функций, принимающих вещественные значения $-1, 0$ и 1 . На рис. 3 показаны такие функции для $N=4$.

Ортогональность функций. Рассмотрим функции χ' . По определению (2) для произвольной точки $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ спектра и $t = 1 \div N$ имеем множества $V_{\lambda,t}$, характеристические функции которых $\chi_{\lambda,t}$ определяют рассмотренные выше функции:

$$\chi'_{\lambda,t} = \chi_{\lambda,t} - \chi_{\lambda,t+N/2}, \quad t = 1 \div N/2. \quad (16)$$

Свойства функций $\chi'_{\lambda,t}$ доказываются следующими леммами:

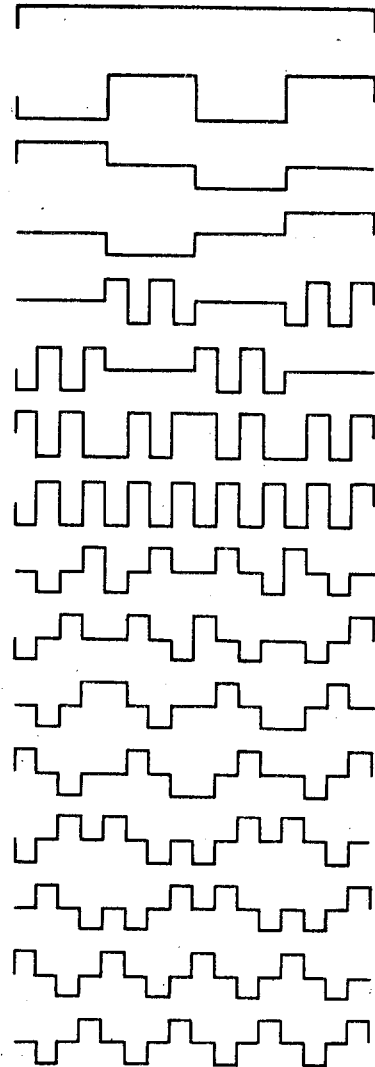


Рис. 2.

Лемма 1. А. Для каждого фиксированного значения $\lambda \in X_N$ функции $\chi_{\lambda,t}$ ортогональны по t в X_N .

Б. Для каждого фиксированного значения $t = 1 \div N/2$ функции $\chi_{\lambda,t}$ ортогональны в X_N , т. е.

$$\sum_{x \in X_N} \chi_{\lambda_1,t}(x) \chi_{\lambda_2,t}(x) = c_{\lambda_1,t} \delta(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (17)$$

т. е. для фиксированного $\lambda \in X_N$ множество X_N разбивается на непересекающиеся множества $V_{\lambda,t}$, поэтому имеем для любого $x \in X_N$

$$\chi_{\lambda_1,t_1}(x) \chi_{\lambda_2,t_2}(x) = 0, \quad t_1 \neq t_2. \quad (18)$$

Докажем второе утверждение леммы. Так как по определению

$$\chi_{\lambda_1,t} \chi_{\lambda_2,t} = \chi_{\lambda_1,t} \chi_{\lambda_2,t} - \chi_{\lambda_1,t} \chi_{\lambda_2,t+N/2} - \chi_{\lambda_1,t+N/2} \chi_{\lambda_2,t} + \chi_{\lambda_1,t+N/2} \chi_{\lambda_2,t+N/2}, \quad (19)$$

то для того, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{x \in X_N} \chi_{\lambda_1,t}(x) \chi_{\lambda_2,t}(x) = 0 \quad (20)$$

при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, достаточно показать, что для любого $x \in (V_{\lambda_1,t} \cap V_{\lambda_2,t}) \cup (V_{\lambda_1,t+N/2} \cap V_{\lambda_2,t+N/2})$ существует $y \in (V_{\lambda_1,t} \cap V_{\lambda_2,t+N/2}) \cup (V_{\lambda_1,t+N/2} \cap V_{\lambda_2,t})$ и наоборот.

Пусть $x \in V_{\lambda_1,t} \cap V_{\lambda_2,t}$, тогда имеем равенства

$$x_1 \lambda_1^1 + x_2 \lambda_2^1 = t \pmod{N}; \quad x_1 \lambda_1^2 + x_2 \lambda_2^2 = t \pmod{N}. \quad (24)$$

Если, например, одна из компонент $\lambda_1 = (\lambda_1^1, \lambda_2^1)$ различается четностью с компонентами точки $\lambda_2 = (\lambda_1^2, \lambda_2^2)$, т. е. λ_2^1 — четное, а λ_2^2 — нечетное или λ_1^1 — четное, а λ_1^2 — нечетное, или наоборот, то такое y легко находится; действительно, пусть λ_2^1 — четное, а λ_2^2 — нечетное, тогда возьмем точку $y = (x_1, x_2 + N/2)$, для которой имеем

$$\left. \begin{aligned} y_0 \lambda_1 &= x_1 \lambda_1^1 + \left(x_2 + \frac{N}{2}\right) \lambda_2^1 = x_1 \lambda_1^1 + x_2 \lambda_2^1 + \lambda_2^1 \frac{N}{2} = t + \lambda_2^1 \frac{N}{2}; \\ y_0 \lambda_2 &= x_1 \lambda_1^2 + \left(x_2 + \frac{N}{2}\right) \lambda_2^2 = x_1 \lambda_1^2 + x_2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \frac{N}{2} = t + \lambda_2^2 \frac{N}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Поэтому в силу предположения относительно λ_2^1 и λ_2^2 получаем

$$y = (x_1, x_2 + N/2) \in V_{\lambda_1,t} \cap V_{\lambda_2,t+N/2}. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь другой случай, когда все компоненты четные, т. е. $\lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_2^1$ и λ_2^2 — четные. Пусть $\lambda_1 = (2^{k_1} \bar{\lambda}_1^1, 2^{k_2} \bar{\lambda}_2^1)$ и $\lambda_2 = (2^{k_3} \bar{\lambda}_1^2, 2^{k_4} \bar{\lambda}_2^2)$, а числа $(\bar{\lambda}_1^1, \bar{\lambda}_2^1)$ и $(\bar{\lambda}_1^2, \bar{\lambda}_2^2)$ — нечетные. Если они не равны единице и степени разные, то соответствующее этому случаю y легко построить следующим образом. Пусть для примера $k_4 > k_2$, тогда можно взять y равным $y = (x_1, x_2 + N/2^{k_2+1})$. Осуществляя проверку, как и в (22),

легко убедиться, что такая точка принадлежит множеству $V_{\lambda_1, t+N/2} \cap V_{\lambda_2, t}$.

Осталось рассмотреть случай, когда все числа нечетные — $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_1^2$ и λ_2^2 . В этом случае представим числа λ_2^1 и λ_2^2 в виде $\lambda_2^1 = \lambda_1^1 + \Delta\lambda^1$, $\lambda_2^2 = \lambda_1^2 + \Delta\lambda^2$, где числа $\Delta\lambda^1$ и $\Delta\lambda^2$ — четные числа. Но так как

$$\left. \begin{aligned} x_1\lambda_1^1 + x_2\lambda_2^1 &= (x_1 + x_2)\lambda_1^1 + x_2\Delta\lambda^1; \\ x_1\lambda_1^2 + x_2\lambda_2^2 &= (x_1 + x_2)\lambda_1^2 + x_2\Delta\lambda^2; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

рассматриваемый случай сводится к уже приведенному выше, при этом следует заменить числа $(\lambda_1^1, \lambda_2^1)$ и $(\lambda_1^2, \lambda_2^2)$ соответственно на числа $(\lambda_1^1, \Delta\lambda^1)$ и $(\lambda_1^2, \Delta\lambda^2)$, а числа (x_1, x_2) в (23) и (22) на $(x_1 + x_2, x_2)$.

Таким образом, лемма полностью доказана. Результат этой леммы легко обобщить следующим образом. В пространстве $X = X_N \times [1, N/2]$ отождествим такие элементы (λ, t) и (λ_1, t_1) , для которых имеем $V_{\lambda_1, t_1} = V_{\lambda, t}$ и $V_{\lambda_1, t_1+N/2} = V_{\lambda, t+N/2}$ или $V_{\lambda_1, t_1} = V_{\lambda, t+N/2}$ и $V_{\lambda_1, t_1+N/2} = V_{\lambda, t}$, т. е. $\chi'_{\lambda_1, t_1} = \pm \chi'_{\lambda, t}$.

Обозначим приведенное при этой факторизации множество через Y_N . Тогда справедлива следующая лемма, которая доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 2. Для произвольных элементов (λ_1, t_1) и (λ_2, t_2) из множества Y_N выполняется равенство

$$\sum_{X_N} \chi'_{\lambda_1, t_1}(x) \chi'_{\lambda_2, t_2}(x) = c_{\lambda_1, t_1} \delta(\lambda_2 - \lambda_1) \delta(t_2 - t_1), \quad (25)$$

где
$$c_{\lambda_1, t_1} = \sum_{X_N} (\chi'_{\lambda_1, t_1}(x))^2.$$

С помощью леммы 2 можно доказать обратное утверждение.

Лемма 3. Для произвольного значения $x \in X_N$ имеем

$$f_x = c_x^{-1} \sum_{(\lambda, t) \in Y_N} f'_{\lambda, t} \chi'_{x, t}(\lambda), \quad (26)$$

где
$$c_x = \sum_{Y_N} (\chi'_{x, t}(\lambda))^2.$$

Более точная формула обращения легко находится при использовании обратного преобразования Фурье в следующей лемме.

Лемма 4. Для произвольных значений $(n, k) \in X_N$ имеем

$$f_{n, k} = \sum_{U_{n, k, N}} f'_{p, s, t} - \sum_{U_{n, k, N/2}} f'_{p, s, t}, \quad (27)$$

где множество $U_{n, k, N} = \bigcup_{t=1}^{N/2} \{V_{n, k, t}\}$, а $U_{n, k, N/2} = \bigcup_{t=1}^{N/2} \{V_{n, k, t+N/2}\}$.

Формула обращения в данной лемме показывает, как формируется значение двумерного сигнала в произвольной точке непосредственно по всему тензору третьего ранга; причем такая формула в некотором смысле похожа на формулу (14), определяющую разложение (13) спектра.

Доказательство. По определению обратного преобразования Фурье и тензорному представлению фурье-спектра имеем

$$f_{n, k} = \sum_{p=1}^N \sum_{s=1}^N F_{p, s} W^{-np - ks}, \quad F_{p, s} = \sum_{t=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} f'_{p, s, t} W^t.$$

Поэтому подстановкой второго равенства в первое получаем

$$f_{n, k} = \sum_{p, s} \sum_t f'_{p, s, t} W^{t - np - ks} = \sum_{Q=1}^N \tilde{f}_{n, k, Q} W^Q, \quad (28)$$

где по определению $\tilde{f}_{n,k,Q} = \sum_{U_Q} f'_{p,s,t}$ а множества

$$U_Q = U_{n,k,Q} = \{(p, s, t); t - np - ks = Q \pmod{N}\} \quad (29)$$

для произвольных значений $n, k, Q = 1 \div N$.

Таким образом, получаем для $\tilde{f}_{n,k,Q} = \tilde{f}_{n,k,Q} - \tilde{f}_{n,k,Q+N/2}$

$$f_{n,k} = \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W^Q. \quad (30)$$

Далее, так как исходная функция f представляет массив действительных чисел, а базисные функции W^Q есть $W_1^Q + iW_2^Q$, имеем

$$f_{n,k} = \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_1^Q + i \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_2^Q, \quad (31)$$

откуда следует, что должны выполняться уравнения

$$\sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_2^Q = 0 \text{ и } \sum_{Q=1}^{N/2} \tilde{f}_{n,k,Q} W_1^Q = f_{n,k}$$

для всех $n, k = 1 \div N$. Так как $\{W_1^Q\}$ и $\{W_2^Q\}$ составляют базис в пространстве сигналов, а действительный сигнал $\{f_{n,k}\} \neq 0$, то эти уравнения могут выполняться только при условиях

$$\tilde{f}_{n,k,Q} = 0, \quad Q = 1 \div N/2 - 1 \text{ и } \tilde{f}_{n,k,N/2} = 0. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (31) получаем формулу (27), что и требовалось доказать.

Заключение. Таким образом, на основе предлагаемого тензорного способа представления ДДПФ реализуется эффективный алгоритм вычисления ДДПФ. При этом аналогичный алгоритм можно использовать и для более общих сигналов, размерности которых не обязательно равные, достаточно, чтобы они были кратными. Это относится и к описанным ортогональным функциям, которые, возможно, найдут себе хорошее применение в области цифровой обработки сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хуанг, Шрейбер, Третьяк. Обработка изображений.— В кн.: Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин: Пер. с англ.— М.: Мир, 1973.
2. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.
3. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ.— М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 26 марта 1984 г.

УДК 621.398.1 : 621.391.037.3

В. Г. ЛИПСКИЙ
(Минск)

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ДУГАМИ ПАРАБОЛ

Одна из областей применения методов аппроксимации плоских кривых дугами аналитических линий — сжатие данных в измерительных и терминальных системах [1, 2].

При сжатии данных наибольшее распространение получили методы аппроксимации дугами линий, представляющих собой полиномы нулевой