Таблица 1

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$X_1(z)$	0,5	1	0,5									
$X_2(z)$	0,5	1	0,5	0,5	1	0,5						
$X_3(z)$	0,5	1	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	0,5

значениям дисперсии σ^2 случайной составляющей, приведены во 2, 3 и 4-й строках табл. 2.

Таблица 2

σ^2	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25
$X_1(z)$	0,0032	0,013	0,031	0,062	0,092
$X_2(z)$	0,0014	0,0073	0,024	0,054	0,095
$X_3(z)$	0,00079	0,0039	0,0088	0,014	0,020

Поступила в редакцию 19 апреля 1984 г.

УДК 519.248

В. Г. АЛЕКСЕЕВ

(Москва)

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ИНТЕРВАЛА КОРРЕЛЯЦИИ ГАУССОВОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Различные определения интервала корреляции (ИК) стационарного случайного процесса и различные подходы к его оцениванию могут быть найдены в [1—5]. В статье [5], в частности, справедливо отмечается, что исследование свойств ИК является достаточно сложным вопросом, не нашедшим пока должного освещения в литературе. В той же работе построена асимптотически несмещенная и состоятельная непараметрическая оценка для квадратичного ИК (т. е. для одного из возможных определений ИК).

В настоящей работе будут даны четыре определения ИК для стационарного случайного процесса с дискретным временем. Поскольку обработка непрерывной реализации случайного процесса на цифровой ЭВМ неизбежно требует ее предварительной дискретизации, то предположение о дискретности исследуемого случайного процесса едва ли может рассматриваться как некое ограничение общности. Для всех четырех ИК будут предложены непараметрические оценки, которые (по крайней мере, в случае гауссового случайного процесса) отличаются высокой скоростью сходимости (при неограниченном возрастании объема выборки) к истинным значениям оцениваемых величин.

Итак, пусть $\{\xi(k),\ k=0,\ \pm1,\ \ldots\}$ — вещественный стационарный случайный процесс с нулевым средним, корреляционной функцией $R(k)=\mathbf{E}\xi(j+k)\xi(j)$, где $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания, и спектральной плотностью

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-ik\lambda}R(k),\quad \lambda\in\Pi=(-\pi,\pi].$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция $f(\lambda)$, будучи продолженной периодическим образом за пределы интервала П, имеет все интересующие нас производные. Очевидно, это предположение будет выполнено, если функция $R(k)$ достаточно быстро убывает (по абсолютной величине) при $k\to\infty$. В качестве определения ИК рассмотрим величины $T_j=\pi L_j/R^2(0)$, $j=\overline{0,3}$, где

$$L_0=\frac{1}{\pi}\left[\frac{R^2(0)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}R^2(k)\right]=\int\limits_{\Pi}f^2(\lambda)\,d\lambda \tag{1}$$

и

$$L_j=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2j}R^2(k)=\int\limits_{\Pi}[f^{(j)}(\lambda)]^2d\lambda,\quad j=1,2,3. \tag{2}$$

Здесь нас не должно смущать то обстоятельство, что, несмотря на дискретность случайного процесса $\xi(k)$, ни величины T_j, ни их статистические оценки, определенные ниже, не будут целыми числами. Приступая к статистическому оцениванию величин L_j, $j=\overline{0,3}$, предположим дополнительно, что $\xi(k)$ — гауссовый случайный процесс.

Воспользуемся тем, что согласно (1) и (2) величины L_j, $j=\overline{0,3}$, являются функционалами от спектральной плотности $f(\lambda)$, оценки для которых построены и изучены в работе [6]. В определение оценки для каждого из функционалов L_j будет входить некоторая функция $w(x)$ (своя функция $w(x)$ для каждого функционала L_j). Условимся заранее, что формулы (3)—(6) описывают значения функций $w(x)$ лишь внутри интервала $(-1,1)$, вне которого все они тождественно равны нулю.

Пусть

$$I_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi(k)e^{-ik\lambda}\right|^2$$

— периодограмма, построенная по выборке из n последовательных отсчетов случайного процесса $\xi(k)$. Оценки функционалов L_j, $j=\overline{0,3}$, будем искать в виде

$$L_0^{(n)}=\frac{2}{h}\int\limits_0^{\pi}I_n(\lambda)\,d\lambda\int\limits_{-\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\mu-\lambda}{h}\right)I_n(\mu)\,d\mu$$

и

$$L_j^{(n)}=2\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{j!}{h^{j+1}}\int\limits_{-\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\mu-\lambda}{h}\right)I_n(\mu)\,d\mu\right]^2d\lambda,\quad j=1,2,3,$$

причем $0<h=h(n)\leqslant\pi$ во всех случаях, а функции $w(x)$ для $j=\overline{0,3}$ описываются соотношениями

$$w(x)=(3/4)(1-x^2), \tag{3}$$

$$w(x)=(105/32)(5x-14x^3+9x^5), \tag{4}$$

$$w(x)=(3465/4096)(-35+756x^2-2970x^4+4004x^6-1755x^8) \tag{5}$$

и соответственно

$$w(x)=(45\,045/16\,384)(-693x+10\,725x^3-$$
$$-50\,050x^5+99\,450x^7-88\,825x^9+29\,393x^{11}). \tag{6}$$

В работе [6] показано, что при сделанных нами предположениях

$$\mathbf{E}(L_j^{(n)}-L_j)^2\leqslant 16\pi n^{-1}L_0\max_{\lambda}|f^{(2j)}\lambda|^2+O(n^{-1}),\quad j=\overline{0,3} \tag{7}$$

(т. е. средний квадрат ошибки оценивания функционала L_j убывает при $n \to \infty$ как n^{-1}), если величина $h = h(n)$, используемая при построении оценки функционала L_j, $j = \overline{0,\ 3}$, удовлетворяет дополнительному условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^{2j}} \left(\frac{1}{nh^{2j+2}} + nh^{6j+4} \right) = 0. \tag{8}$$

Функции $w(x)$, используемые нами при построении оценок функционалов L_j, не являются единственно возможными. Определяемые формулами (3) — (6) функции $w(x)$ (вместе с условием (8), наложенным на последовательность $h(n)$) — простейшие из тех, которые приводят к результату (7).

Нам осталось перейти от оценок функционалов L_j к оценкам самих ИК T_j, $j = \overline{0,\ 3}$. Этот последний шаг в [1—5] оказывается излишним благодаря предположению о том, что корреляционная функция исследуемого случайного процесса нормирована. Тем самым в [1—5] неявно предполагается, что величина $R(0)$ (или некоторая степень от нее) оценивается независимо по отдельной выборке. В условиях настоящей работы необходима оценка величины $R^2(0)$. Полагая

$$\rho_1^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \xi^2(j)\, \xi^2(k),$$

где m — объем выборки, используемой для построения оценки величины $R^2(0)$, и пользуясь правилом Иссерлиса для вычисления моментов произведения гауссовых случайных величин (см., например, [7, гл. 2, § 4]), будем иметь

$$\mathbf{E}\rho_1^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} [R^2(0) + 2R^2(j-k)]$$

и
$$\mathbf{D}\rho_1^2 \equiv \mathbf{E}(\rho_1^2)^2 - (\mathbf{E}\rho_1^2)^2 = \frac{1}{m^4} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \{\mathbf{E}[\xi(j)\,\xi(k)\,\xi(p)\,\xi(q)]^2 -$$
$$- [R^2(0) + 2R^2(j-k)][R^2(0) + 2R^2(p-q)]\} =$$
$$= \frac{8}{m^4} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} [R^2(j-p)\, R^2(k-q) +$$
$$+ R^2(0)\, R^2(k-p) + 6R(j-k)\, R(k-p)\, R(p-q)\, R(q-j) +$$
$$+ 4R(0)\, R(k-p)\, R(p-q)\, R(q-k)].$$

Отсюда, используя предположение

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} R^2(j) < \infty,$$

нетрудно показать, что

$$\mathbf{E}\rho_1^2 - R^2(0) \leqslant \frac{2}{m} \sum_{j=-\infty}^{\infty} R^2(j) = O(m^{-1}) \text{ и } \mathbf{D}\rho_1^2 = O(m^{-1}),$$
$$\text{так что и } \mathbf{E}[\rho_1^2 - R^2(0)]^2 = O(m^{-1}).$$

Вместо оценки ρ_1^2 можно было бы также рассмотреть несмещенную оценку

$$\rho_2^2 = \frac{1}{3m} \sum_{k=1}^{m} \xi^4(k),$$

которая, однако, перестает быть несмещенной (даже асимптотически), как только нарушается равенство $\mathbf{E}\xi^4(k) = 3R^2(0)$, справедливое в предположении, что $\xi(k)$ — гауссовый случайный процесс. Оценка ρ_1^2 в этом смысле более робастна (устойчива).

Предположим, например, что случайный процесс $\xi(k)$ описывается соотношением

$$\xi(k) = \exp\eta(k) - \exp(\sigma^2/2),$$

где $\{\eta(k),\ k = 0,\ \pm1,\ \ldots\}$ — гауссовый стационарный процесс со средним 0 и с корреляционной функцией $r(k) = \mathrm{E}\eta(j+k)\eta(j)$, причем $r(0) = \sigma^2$. В этом случае говорят, что $\xi(k)$ — логарифмически нормальный стационарный случайный процесс.

Пользуясь свойствами логарифмически нормального распределения (см., например, [8]), нетрудно показать, что

$$R(0) = \mathrm{E}\xi^2(0) = e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right),$$

$$\mathrm{E}\rho_1^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{E}[\xi(j)\xi(k)]^2 = m^{-2}e^{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left[e^{2\sigma^2+4r(j-k)} - \right.$$

$$\left. - 4e^{\sigma^2+2r(j-k)} + 4e^{r(j-k)} + 2e^{\sigma^2} - 3\right]$$

и

$$\mathrm{E}\rho_1^2 - R^2(0) = m^{-2}e^{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left\{e^{2\sigma^2}\left[e^{4r(j-k)} - 1\right] - \right.$$

$$\left. - 4e^{\sigma^2}\left[e^{2r(j-k)} - 1\right] + 4\left[e^{r(j-k)} - 1\right]\right\},$$

причем $\mathrm{E}\rho_1^2 - R^2(0) = O(m^{-1})$, если только $\sum\limits_{j=0}^{\infty}|r(j)| < \infty$.

Что же касается оценки ρ_2^2, то она здесь оказывается непригодной, так как $\mathrm{E}\xi^4(0) \neq 3R^2(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1.— М.: Сов. радио, 1974.
2. **Мирский Г. Я.** Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения.— М.: Энергоиздат, 1982.
3. **Романенко А. Ф., Сергеев Г. А.** Вопросы прикладного анализа случайных процессов.— М.: Сов. радио, 1968.
4. **Жовинский А. Н.** Оценивание интервала корреляции с позиции теории проверки гипотез.— Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 9, с. 1962—1964.
5. **Кулешов Е. Л.** Оценивание интервала корреляции.— Автометрия, 1984, № 2, с. 100—102.
6. **Алексеев В. Г.** Об оценках некоторых функционалов от спектральной плотности гауссовских случайных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1980, т. 25, № 2, с. 271—277.
7. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. I.— М.: Наука, 1965.
8. **Прохоров А. В.** Логарифмически нормальное распределение.— В кн.: Математическая энциклопедия, т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 1982, с. 408.

Поступила в редакцию 21 января 1985 г.

УДК 621.391.81

В. А. ПОНОМАРЕВ

(Устинов)

СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Широкое применение спектрального разложения по дискретным экспоненциальным функциям (ДЭФ) в задачах цифровой обработки стационарных процессов и систем объясняется в основном двумя причинами. Во-первых, ДЭФ так же, как характеристики стационарных случай-