ЛИТЕРАТУРА

1. **Бакут П. А., Троицкий И. Н., Демин А. А., Сафронов А. Н.** Современное состояние фазовой проблемы в оптике.— Зарубеж. радиоэлектроника, 1978, № 11, с. 3.
2. **Репин В. Г., Тартаковский Г. П.** Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем.— М.: Сов. радио, 1977.
3. **Матвеев И. Н., Сафронов А. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д.** Адаптация в информационных оптических системах.— М.: Радио и связь, 1984.
4. **Троицкий И. Н., Сафронов А. Н., Демин А. А.** Киноформ: синтез и применение.— Зарубеж. радиоэлектроника, 1978, № 9, с. 3.

Поступила в редакцию 18 июня 1984 г.

УДК 512.643 : 519.613.2 : 519.254

В. М. ЕФИМОВ, В. Г. ПОЛОСЬМАК, А. Л. РЕЗНИК

(Новосибирск)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАЩЕНИЯ ЛЕНТОЧНЫХ МАТРИЦ

Решение многих задач при обработке сигналов связано с обращением симметрических ленточных матриц. Примером может служить оценивание по методу максимума правдоподобия сдвига между двумя последовательностями отсчетов с использованием интерполяции. Стандартные компьютерные методы обращения приводят к существенным временным затратам, которые оказываются неприемлемыми при экспресс-анализе сигналов. В связи с этим представляют интерес аналитические методы обращения матриц указанного типа. Кроме того, использование предварительных аналитических преобразований может служить базой для построения ускоренных компьютерных алгоритмов обращения. Ниже рассматриваются три метода обращения, в основе которых лежит процедура составления соответствующих разностных уравнений.

Разностные уравнения для прямого вычисления определителей и миноров. Рассмотрим трехдиагональную симметрическую матрицу размером $n \times n$ с определителем

$$\Delta(n) = \det \begin{vmatrix} 1 \alpha_1 0 0 & . & . & . & 0 \\ \alpha_1 1 \alpha_1 0 & . & . & . & 0 \\ 0 \alpha_1 1 \alpha_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \alpha_1 1 \alpha_1 \\ . & . & . & . & 0 0 \alpha_1 1 \end{vmatrix}.$$

Непосредственной проверкой (раскрывая определитель) можно убедиться, что определитель такой матрицы удовлетворяет разностному уравнению

$$\Delta(n) = \Delta(n-1) - \alpha_1^2 \Delta(n-2). \tag{1}$$

Решение этого уравнения очевидно:

$$\Delta(n) = \frac{1}{z_1 - z_2}\left(z_1^{n+1} - z_2^{n+1}\right), \tag{2}$$

где z_1 и z_2 — корни квадратного уравнения

$$z^2 - z + \alpha_1^2 = 0. \tag{3}$$

Анализируя минор $\Delta(i, j/n)$ (i — номер строки, j — номер столбца) при $j \leqslant i$, убеждаемся, что он распадается на произведение

$$\Delta(i, j/n) = (-\alpha_1)^{i-j}\Delta(j-1)\Delta(n-i). \tag{4}$$

Соотношение (4) для минора $\Delta(i, j/n)$ также является решением разностного, «нестационарного» уравнения. На «начальном» и «конечном» участках оно совпадает с (1), а на «среднем» участке разностное уравнение имеет вид

$$\Delta(k) = \alpha_1\Delta(k-1). \tag{5}$$

Использование метода составления разностных уравнений для прямого вычисления определителя и миноров резко усложняется при увеличении числа диагоналей матрицы. Например, для пятидиагональной матрицы размером $n \times n$ с определителем

$$\Delta(n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}$$

последний находится путем решения системы из двух уравнений:

$$A_n - A_{n-1} + \alpha_2^2 A_{n-3} - \alpha_2^4 A_{n-4} + \alpha_1 B_{n-1} - \alpha_1\alpha_2 B_{n-2} = 0;$$

$$B_n + \alpha_2 B_{n-1} - \alpha_1 A_{n-1} = 0. \tag{6}$$

Здесь $A_k = \Delta(k)$, а $B_{k-1} = \Delta(1, 2/k)$ — минор, получаемый из определителя $\Delta(k)$ вычеркиванием первой строки и второго столбца.

Решение этой системы есть

$$A_n = \sum_{k=1}^{5} \left(z_k^{n+4} + \alpha_2 z_k^{n+3}\right) \Big/ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{5} (x_k - x_l), \quad B_n = \sum_{k=1}^{5} \alpha_1 z_k^{n+3} \Big/ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{5} (x_k - x_l), \tag{7}$$

где $z_5 = \alpha_2$, а остальные z_k являются корнями уравнения четвертой степени, сводящегося к возвратному:

$$z^4 + z^3(2\alpha_2 - 1) + z^2(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2 + \alpha_1^2) + z\alpha_2^2(2\alpha_2 - 1) + \alpha_2^4 = 0. \tag{8}$$

Разностные уравнения для миноров (как и в случае трехдиагональной матрицы) нестационарны и распадаются на три «основных». «Начальный» и «конечный» участки описываются соотношениями (6). На «среднем» участке разностная схема описывает поведение минора

$$C_{l-1} = \Delta(l, 1/l);$$

$$C_n - \alpha_1 C_{n-1} + \alpha_2 C_{n-2} - \alpha_1\alpha_2^2 C_{n-3} + \alpha_2^4 C_{n-4} = 0. \tag{9}$$

Решение (9) очевидно:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} z_k^{n+3} \Big/ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{4} (z_k - z_l), \tag{10}$$

где z_k — корни уравнения четвертой степени, сводящегося к возвратному:

$$z^4 - \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 - \alpha_1\alpha_2^2 z + \alpha_2^4 = 0. \tag{11}$$

Появление между участками стационарности плавных переходов усложняет соотношение для минора:

$$\Delta(i, j/n) = (-1)^{i-j} C_{i-j} A_{n-i} A_{j-1} - \alpha_2 C_{i-j-1} [A_{n-i} B_{j-1} + A_{j-1} B_{n-i}] +$$
$$+ \alpha_2^2 C_{i-j-2} [\alpha_2 A_{n-i} A_{j-2} + \alpha_2 A_{n-i-1} A_{j-1} + B_{n-i} B_{j-1}] -$$
$$- \alpha_2^4 C_{i-j-3} [A_{n-i-1} B_{j-1} - A_{j-2} B_{n-i}] + \alpha_2^6 C_{i-j-4} A_{n-i-1} A_{j-2}. \qquad (12)$$

Соотношения (2), (4), (7) и (12) дают аналитическое решение задачи для трех- и пятидиагональных матриц и могут быть использованы для расчетов на компьютере. Более простыми могут оказаться расчеты с использованием рекурсий (1), (6) и (9).

Разностные уравнения для коэффициентов в двусторонней процедуре Гаусса. В ряде случаев при обращении ленточных симметрических матриц на ЭВМ полезными оказываются алгоритмы, являющиеся различными модификациями известного метода исключения Гаусса.

Так, нахождение решения системы линейных уравнений

$$AX = B = (b_1, \ldots, b_n)^T \qquad (13)$$

с пятидиагональной матрицей A, имеющей определитель

$$\Delta(n) = \det \begin{vmatrix} 1\alpha_1\alpha_2 0 \; . \; . \; . & 0 \\ \alpha_1 1\alpha_1\alpha_2 0 \; . \; . \; . & 0 \\ \alpha_2\alpha_1 1\alpha_1\alpha_2 0 \; . \; . \; . & 0 \\ 0\alpha_2\alpha_1 1\alpha_1\alpha_2 0 \; . \; . \; . & 0 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & . \\ 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \alpha_2\alpha_1 1 \end{vmatrix},$$

можно представить в виде следующей процедуры.

На первом этапе имеем два начальных уравнения из системы (13). На втором этапе, исключая переменную x_1 из первых трех уравнений, получаем два соотношения, связывающие переменные x_2, x_3, x_4, x_5:

$$A_{11}^{(2)} x_2 + A_{12}^{(2)} x_3 + A_{13}^{(2)} x_4 + A_{14}^{(2)} x_5 = L_1^{(2)},$$
$$A_{21}^{(2)} x_2 + A_{22}^{(2)} x_3 + A_{23}^{(2)} x_4 + A_{24}^{(2)} x_5 = L_2^{(2)}.$$

На k-м шаге после исключения переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ из первых $(k+1)$ уравнений будем иметь соотношения:

$$A_{11}^{(k)} x_k + A_{12}^{(k)} x_{k+1} + A_{13}^{(k)} x_{k+2} + A_{14}^{(k)} x_{k+3} = L_1^{(k)};$$
$$A_{21}^{(k)} x_k + A_{22}^{(k)} x_{k+1} + A_{23}^{(k)} x_{k+2} + A_{24}^{(k)} x_{k+3} = L_2^{(k)}. \qquad (14)$$

Учитывая симметричность матрицы A, можно аналогичную процедуру исключения провести, начиная с переменных x_n, x_{n-1} и т. д. В результате на $(n-k-2)$-м шаге получим еще два уравнения:

$$A_{14}^{(n-k-2)} x_k + A_{13}^{(n-k-2)} x_{k+1} + A_{12}^{(n-k-2)} x_{k+2} + A_{11}^{(n-k-2)} x_{k+3} = M_1^{(n-k-2)};$$
$$A_{24}^{(n-k-2)} x_k + A_{23}^{(n-k-2)} x_{k+1} + A_{22}^{(n-k-2)} x_{k+2} + A_{21}^{(n-k-2)} x_{k+3} = M_2^{(n-k-2)}. \qquad (15)$$

Объединение (14) и (15) дает систему для нахождения неизвестных x_k, x_{k+1}, x_{k+2} и x_{k+3}, причем ее коэффициенты $A_{ij}^{(k)}$, $L_{ij}^{(k)}$, $M_{ij}^{(k)}$ связаны разностными уравнениями:

$$A_{i1}^{(k+1)} = \alpha_1 A_{i1}^{(k)} - \alpha_2 A_{i2}^{(k)}; \quad A_{i2}^{(k+1)} = A_{i1}^{(k)} - \alpha_2 A_{i3}^{(k)};$$
$$A_{i3}^{(k+1)} = \alpha_1 A_{i1}^{(k)} - \alpha_2 A_{i4}^{(k)}; \quad A_{i4}^{(k+1)} = \alpha_2 A_{i1}^{(k)};$$
$$L_i^{(k+1)} = A_{i1}^{(k)} b_{k+2} - \alpha_2 L_i^{(k)}; \quad M_i^{(k+1)} = A_{i1}^{(k)} b_{n-k-1} - \alpha_2 M_i^{(k)}; \qquad (16)$$
$$A_{11}^{(1)} = 1; \quad A_{12}^{(1)} = \alpha_1; \quad A_{13}^{(1)} = \alpha_2; \quad A_{14}^{(1)} = 0;$$
$$A_{21}^{(1)} = \alpha_1; \quad A_{22}^{(1)} = 1; \quad A_{23}^{(1)} = \alpha_1; \quad A_{24}^{(1)} = \alpha_2;$$
$$L_i^{(1)} = b_i; \quad M_i^{(1)} = b_{n-i+1}, \quad i = 1, 2.$$

Решение (14), (15) представимо в виде

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} L_1^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{13}^{(k)} & A_{14}^{(k)} \\ L_2^{(k)} & A_{22}^{(k)} & A_{23}^{(k)} & A_{24}^{(k)} \\ M_1^{(n-k-2)} & A_{13}^{(n-k-2)} & A_{12}^{(n-k-2)} & A_{11}^{(n-k-2)} \\ M_2^{(n-k-2)} & A_{23}^{(n-k-2)} & A_{22}^{(n-k-2)} & A_{21}^{(n-k-2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{13}^{(k)} & A_{14}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & A_{23}^{(k)} & A_{24}^{(k)} \\ A_{14}^{(n-k-2)} & A_{13}^{(n-k-2)} & A_{12}^{(n-k-2)} & A_{11}^{(n-k-2)} \\ A_{24}^{(n-k-2)} & A_{23}^{(n-k-2)} & A_{22}^{(n-k-2)} & A_{21}^{(n-k-2)} \end{vmatrix}}. \qquad (17)$$

Используя (16), можно показать, что нижний определитель в (17) не зависит от индекса k и равен $-\alpha_2^{n-4}\Delta(n)$. С помощью несложных и не вызывающих принципиальных затруднений преобразований выражение для элемента $C_{ij}(j \leqslant i)$ матрицы $C = A^{-1}$ приводится к форме

$$C_{ij} = \alpha_2^{-n+4}\{- D_{j-1}[\alpha_2^{n-i-1}D_{i-3}\Delta(n-i-1) +$$
$$+ \alpha_2^{-2}\overline{D}_{i-2}(D_{n-i+1}D_{n-i-2} - D_{n-i}D_{n-i-1}) + \alpha_2^{n-i-4}D_{i-1}\Delta(n-i)] +$$
$$+ D_{j-2}[\alpha_2^{n-i-1}D_{i-2}\Delta(n-i-1) + \alpha_2^{-2}D_{i-1}(D_{n-i+1}D_{n-i-2} - D_{n-i}D_{n-i-1}) +$$
$$+ \alpha_2^{n-i-4}D_i\Delta(n-i)]\}/\Delta(n).$$

Здесь введено обозначение $D_k = A_{21}^{(k)}$. При этом выражения для $\Delta(k)$ и D_k могут быть найдены из разностных уравнений:

$$\Delta(k) = \Delta(k-1) - \alpha_1^2\Delta(k-2) - \alpha_2^2\Delta(k-3) + \alpha_2^4\Delta(k-4) +$$
$$+ 2\alpha_1^2\alpha_2\sum_{l=0}^{n-3}(-\alpha_2)^l\,\Delta(k-l-3);$$

$$D_{k+1} = \alpha_1 D_k - \alpha_2 D_{k-1} + \alpha_1\alpha_2^2 D_{k-2} - \alpha_2^4 D_{k-3}.$$

В соответствии с указанной методикой на ЭВМ были проведены контрольные расчеты по обращению пятидиагональных симметрических матриц размерностью 50×50. При этом время обращения на ЭВМ «Электроника-79» не превышало нескольких секунд, а максимальная ошибка при вычислении элементов обратной матрицы находилась в пределах 10^{-7} (расчеты велись с «двойной» точностью).

Представление ленточной матрицы в виде рекурсивного фильтра с конечной импульсной характеристикой. Систему уравнений, соответствующую ленточной матрице, можно рассматривать как описание прохождения искомой последовательности $\ldots 0, x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots$ через рекурсивный фильтр с конечной импульсной характеристикой

$$\sum_{k=-m}^{m}\alpha_k x_{n+k} = C_n, \qquad (18)$$

где $C_1, \ldots, C_N$ — последовательность правых частей уравнений; $\alpha_k = \alpha_{-k}$.

При обращении матриц большой размерности $(N \geqslant 4m)$ целесообразна следующая процедура. Вычисляя z-преобразование от левой и правой частей уравнения (18) и производя деление на передаточную функцию ленточной матрицы

$$\alpha(z) = \sum_{l=-m}^{m}\alpha_l z^l, \qquad (19)$$

получим следующее соотношение:

$$\sum_{n=1}^{m}x_n z^{-n}\varphi_n(z) + \sum_{n=m+1}^{N-m}x_n z^{-n} + \sum_{n=N-m+1}^{N}x_n z^{-n}\varphi^*_{N-n+1}(z) = \left(\sum_{n=1}^{N}C_n z^{-n}\right)\Big/\alpha(z). \qquad (20)$$

Здесь $\varphi_n(z) = \left(\sum_{l=-(n-1)}^{m} \alpha_l z^{-l}\right) \Big/ \alpha(z)$, $\varphi^*_{N+1-n}(z) = \left(\sum_{l=-(N-n)}^{m} \alpha_l z^{-l}\right) \Big/ \alpha(z)$, $n = \overline{1, m}$.

Обратное z-преобразование от (20) дает вместо исходной системы (18) новую систему уравнений:

$$\sum_{n=1}^{m} x_n \tilde{\varphi}_n(k) + x_k = C^*_k \quad (m < k \leqslant N - m), \tag{21}$$

где $\tilde{\varphi}_n(k) = 1[k - (n+1)] \sum_{l=-(n-1)}^{m} \alpha_l \Delta(m - l + k - (n+1))/\alpha_m$;

$$\Delta(m - l + k - (n+1)) = \sum_{r=1}^{2m} \left[z_r^{m-l+k-(n+1)} \Big/ \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq r}}^{2m} (z_r - z_\nu) \right];$$

$$C^*_k = \frac{1}{\alpha_m} \sum_{l=1}^{k} C_l 1[k - (l - m + 1)] \Delta(m + k - l - 2);$$

$1[p]$ — единичная функция; z_r — корни уравнения:

$$\sum_{l=-m}^{m} \alpha_l z^{m+l} = 0. \tag{22}$$

Используя (21) и симметричность исходной матрицы, можно составить систему уравнений для инвертированных исходных последовательностей x_k и C^*_k:

$$\sum_{n=1}^{m} x_{N+1-n} \tilde{\varphi}_n(N + 1 - k) + x_k = \hat{C}^*_{N+1-k} \quad (m < k \leqslant N - m), \tag{23}$$

где

$$\hat{C}^*_k = \frac{1}{\alpha_m} \sum_{l=1}^{k} C_{N+1-l} 1[k - (l - m + 1)] \Delta(m + k - l - 2).$$

Из (21) и (23) путем вычитания соответствующих уравнений приходим к системе

$$\sum_{n=1}^{m} x_n \tilde{\varphi}_n(k) - \sum_{n=1}^{m} x_{N+1-n} \tilde{\varphi}_n(N + 1 - k) = C^*_k - \hat{C}^*_{N-1+k} \quad (n < k \leqslant N - m). \tag{24}$$

Вообще говоря, при $N > 4m$ указанная система уравнений избыточна. Для определения неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ и $x_{N-m+1}, \ldots, x_N$ целесообразно (для минимизации вычислений) выбрать из системы (24) $2m$ центрально-симметричных уравнений, т. е. при четных N индекс k должен пробегать значения от $(N/2) - m + 1$ до $(N/2) + m$, а для нечетных — $k = (N - 2m + 1)/2, \ldots, (N + 2m + 1)/2$, за исключением $k = (N + 1)/2$. В этом случае получающаяся система уравнений решается однозначно, поскольку ее определитель не равен нулю.

Все константы в (24), включая и выражения для правых частей, зависят лишь от величины $\Delta(p)$, которая удовлетворяет разностному уравнению

$$\frac{1}{\alpha_m} \sum_{l=-m}^{m} \alpha_l \Delta(m + l) = 0 \tag{25}$$

и может вычисляться рекурсивно.

8*

В связи с тем, что $\Delta(p)$ ведет себя неустойчиво, целесообразно рекурсивное вычисление величины $\mathring{\Delta}(p) = (-1)^p \Delta(p)/\alpha_m^p$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\alpha_m} \sum_{l=-m}^{m} \alpha_l (-1)^{m+l} \alpha_m^{m+l} \mathring{\Delta}(p) = 0. \tag{26}$$

Неопределенность, возникающая при $\alpha_m \to 0$, устраняется в системе уравнений (24).

После нахождения переменных $x_1, \ldots, x_m$ и $x_{N-m+1}, \ldots, x_N$ остальные переменные определяются либо с помощью (21), (23), либо из первоначальной системы уравнений (18).

Следует заметить, что последний способ обращения ленточных матриц легко обобщается на случай, когда нарушается условие $\alpha_k = \alpha_{-k}$. Представляется эффективным распространить этот метод на обращение ленточных матриц, состоящих из ленточных блоков размером $N \times N$, так как при этом решение системы N^2 линейных уравнений можно свести к решению системы, порядок которой линейно зависит от N.

Поступила в редакцию 5 июля 1985 г.