ВЫВОДЫ

1. Объяснен механизм возникновения двупреломления в неплоскопараллельной пластине мелкозернистого твердого раствора ЦТСЛ, поляризованной по толщине.

2. На модели клиновидной пластины показано, что неоднородное электрическое поле под влиянием обратного пьезоэффекта вызывает диссимметрию и, как следствие, двупреломление в мелкозернистом твердом растворе ЦТСЛ.

3. Даны оценки величины двупреломления, полученного за счет клиновидности поляризованной пластины твердого раствора ЦТСЛ, а также при его переполяризации.

Автор благодарит А. М. Аллавердиева за ценные советы при подготовке работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Трофимов И. Б.** О механизме возникновения двулучепреломления в поликристаллическом твердом растворе системы ЦТСЛ в режиме продольного электрооптического эффекта.— Автометрия, 1980, № 5.
2. **Land C. E., Thacher P. D., Haertling G. H.** Electrooptic ceramic.— Appl. Sol. St. Sci., 1974, v. 4, p. 137—233.
3. **Haertling G. H., Land C. E.** Hot pressed (Pb, La) (Zr, Ti) O_3 ferroelectric ceramics for electrooptic applications.— J. Am. Ceram. Soc., 1971, v. 54, N 1, p. 1—11.
4. **Най Дж.** Физические свойства кристаллов.— М.: Мир, 1967.
5. **Сиротин Ю. Н., Шаскольская М. П.** Основы кристаллофизики.— М.: Наука, 1979.
6. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред.— М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 12 марта 1984 г.

УДК 621.391 : 53.08

В. П. БАКАЛОВ, Н. П. РУССКИХ

(Москва)

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ ЯДРЕ В СЛУЧАЕ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ СИГНАЛОВ

Введение. Задачи интерпретации результатов наблюдений, как правило, относятся к обратным задачам, решение которых часто сводится к решению уравнения свертки. Обычно при этом предполагается, что ядро уравнения свертки известно. Однако на практике распространены ситуации, когда ядро неизвестно. Например, при регистрации сигналов оно может являться случайной функцией и изменяться от измерения к измерению. Так, в оптике при расфокусировке изображения, при искажениях пространственного сигнала, возникающих при взаимном движении источника и регистрирующего устройства, и из-за турбулентности атмосферы регистрируемый сигнал представляет свертку неискаженного сигнала с неизвестной при измерении функцией (ядром).

Казалось бы, что в указанных случаях решение уравнения свертки без какой-либо априорной информации о сигнале и ядре невозможно. Однако можно показать, что при несущественных ограничениях на сигнал и искажающую функцию уравнение свертки теоретически разрешимо.

Известно, что при определенных условиях возможно восстановление многомерных пространственно-ограниченных дискретных [1—3] и непрерывных [4] сигналов по их амплитудному спектру или автокорреляционной функции. Восстанавливаемый сигнал в таком случае является решением интегрального уравнения свертки сигнала со своей комплексно-сопряженной копией. Определим условия, эквивалентные полученным в [1—4] и достаточные для решения уравнения свертки с неизвестным ядром.

Рассмотрим двумерные уравнения свертки для дискретных и непрерывных сигналов.

Дискретные сигналы.

$$s[m, n] = \sum_{l=0}^{L} \sum_{k=0}^{K} f[l, k]\, h[m-l, h-k], \tag{1}$$

где $s[m, n]$, $f[l, k]$, $h[l, k]$ — двумерные решетчатые пространственно-ограниченные в общем случае комплексные функции, представляющие соответственно зарегистрированный и неискаженный сигналы и импульсную реакцию регистрирующей системы (ядро уравнения).

Рассмотрим многочлен, однозначно связанный с двумерным z-преобразованием $s[m, n]$:

$$z_s(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} s[m, n]\, z_1^m z_2^n, \tag{2}$$

где z_1, z_2 — переменные z-преобразования, а M и N — правые границы области, в которой $s[m, n]$ отлична от нуля (левые границы области приняты равными нулю). Функция $z_s(z_1, z_2)$ совпадает с z-преобразованием функции $s[m, n]$ с точностью до множителя $z_1^M z_2^N$ [1—3].

На основании (1) с учетом свойств z-преобразования можно также записать:

$$z_s(z_1, z_2) = z_f(z_1, z_2)\, z_h(z_1, z_2); \tag{3}$$

$$z_f(z_1, z_2) = \sum_{l=0}^{L_f} \sum_{k=0}^{K_f} f[l, k]\, z_1^l z_2^k; \tag{4}$$

$$z_h(z_1, z_2) = \sum_{l=0}^{L_h} \sum_{k=0}^{K_h} h[l, k]\, z_1^l z_2^k, \tag{5}$$

где $z_f(z_1, z_2)$, $z_h(z_1, z_2)$ — многочлены, однозначно связанные с z-преобразованиями функций $f[l, k]$ и $h[l, k]$; $L_f(L_h)$, $K_f(K_h)$ — правые границы области, в которой f и h отличны от нуля.

Очевидно, что уравнения (4) и (5) однозначно задают функции $f[l, k]$ и $h[l, k]$ и решение уравнения (1) относительно $f[l, k]$ при неизвестной $h[l, k]$ может быть найдено, если многочлен (2) будет факторизован в виде (3).

В одномерном случае факторизация многочлена над полем комплексных чисел всегда возможна и дает число сомножителей, равное степени многочлена. В случае двух или большего числа переменных множество разложимых на множители многочленов имеет мощность, равную 0 [5]. Это означает, что практически всегда многочлены (4) и (5) неразложимы над полем комплексных чисел, и, следовательно, представление (2) многочлена $z_s(z_1, z_2)$ в виде (3) единственно с точностью до постоянного комплексного множителя.

Таким образом, решение с точностью до постоянного множителя уравнения (1) при неизвестных пространственно-ограниченных функциях $f[l, k]$, $h[l, k]$ возможно, если выполняются эквивалентные друг другу достаточные условия:

1) функции $f[l, k]$, $h[l, k]$ непредставимы в виде сверток двух или более функций;

2) многочлены (4), (5) неразложимы.

Непрерывные сигналы.

$$s(x, y) = \iint_{\Omega} f(\mu, \nu)\, h(x-\mu, y-\nu)\, d\mu d\nu, \tag{6}$$

где $s(x, y)$, $f(x, y)$, $h(x, y)$ — двумерные пространственно-ограниченные в общем случае комплексные функции, представляющие соответственно зарегистрированный сигнал, неискаженный сигнал и импульсную реакцию регистрирующей системы (ядро уравнения); Ω — ограниченная в пространстве область интегрирования. Спектры пространственно-ограниченных функций s, f и h, обозначаемые в дальнейшем как $S(\xi, \eta)$, $F(\xi, \eta)$ и $H(\xi, \eta)$, являются целыми функциями экспоненциального типа комплексных переменных ξ и η. Действительные части ξ и η есть пространственные частоты.

Рассуждая аналогично ([5]), легко устанавливаем, что решение (6) при неизвестном $h(x, y)$ возможно с точностью до постоянного множителя, если выполняется одно из эквивалентных друг другу достаточных условий:

1) $f(x, y)$ и $h(x, y)$ не могут быть представлены в виде свертки двух или более пространственно-ограниченных функций;

2) спектры $F(\xi, \eta)$, $H(\xi, \eta)$ не могут быть факторизованы на множители, являющиеся целыми функциями;

3) все нули в спектрах $F(\xi, \eta)$ и $H(\xi, \eta)$ функционально связаны, т. е. один нуль $F(\xi, \eta)$ или $H(\xi, \eta)$ однозначно определяет все остальные нули этих функций. Нули $F(\xi, \eta)$, $H(\xi, \eta)$ при этом рассматриваются как функции одной переменной (ξ или η), взятой в качестве параметра [4].

Первые условия для непрерывных и дискретных сигналов совпадают, вторые имеют один и тот же смысл. Естественно, что второе условие для непрерывных сигналов совпадает с условиями для спектров дискретных сигналов. Третье условие для непрерывных сигналов распространяется на нули многочленов z_f и z_h, являющихся целыми функциями переменных z_1, z_2. Известно, что нули многочленов двух переменных, рассматриваемые как функции одной переменной, являются аналитическими функциями. Таким образом, условие «3» для функций z_f и z_h означает, что нули многочлена (4) или (5), рассматриваемые как нули многочлена одной переменной (например, z_1) при другой переменной (z_2), взятой в качестве параметра, являются ветвями одной аналитической функции переменной z_2.

Полученные условия легко могут быть распространены на случай большего числа переменных. Можно ожидать [5], что указанные условия практически всегда выполнимы, если при формировании сигналов и образовании импульсных характеристик систем регистрации сигналов не возникает ситуация, когда физические процессы заведомо приводят к нарушению этих условий.

Числовой пример. Пусть зарегистрирован двумерный дискретный сигнал, отсчеты которого $s[m, n]$ (1) представлены таблицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

В (7) отсчет $s[0, 0]$ расположен в левом верхнем углу, строки соответствуют изменению индекса m, столбцы — изменению индекса n. Тогда многочлен z_s из формулы (2), соответствующий (7), запишется как

$$z_s(z_1, z_2) = 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + (2 + 4x + 5x^2)y + (2 + 3x)y^2 + y^3. \tag{8}$$

Произведем факторизацию (8), используя элементарные алгебраические преобразования

$$z_s(z_1, z_2) = [1 + x + 3x^2 + (1 + x)y + y^2][1 + 2x + y]. \tag{9}$$

Сомножители (9) являются неразложимыми над полем комплексных чисел многочленами переменных z_1, z_2 [4]. Следовательно, разложение (9) единственно с точностью до постоянных множителей.

Таким образом, можно утверждать, что зарегистрированный сигнал (7) является сверткой двух дискретных функций, соответствующих сомножителям (9).

Таблицы отсчетов этих функций следующие:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Одна из таблиц (10) с точностью до постоянного множителя соответствует отсчетам неискаженного сигнала, вторая — отсчетам импульсной реакции регистрирующей системы. Для идентификации сигнала по (10) необходима какая-либо, например качественная, априорная информация.

Заключение. Изложенное позволяет утверждать, что, по крайней мере теоретически, возможно решение уравнения свертки для многомерных сигналов при неизвестном ядре. Поскольку указанные достаточные условия практически всегда выполнимы, единственное существенное ограничение при этом — пространственная ограниченность многомерных функций, представляющих неискаженный сигнал и ядро уравнения свертки.

Так как задача решения уравнений (1), (6) является некорректной, для решения ее в общем виде необходима разработка специальных процедур с привлечением методов регуляризации.

В качестве одного из приложений рассмотренных свойств многомерных уравнений свертки укажем на возможность восстановления астрономических изображений, искаженных турбулентностью атмосферы. В отличие от метода Лябейри [6], предполагающего восстановление автокорреляционной функции изображения в результате совместной обработки большого числа «пятенных» интерферограмм, теоретически возможно восстановление изображения астрономического объекта лишь по одной «пятенной» интерферограмме, так как и изображение, и импульсная реакция системы атмосфера — телескоп описываются двумерными пространственно-ограниченными функциями. В соответствии с вышеизложенным такое восстановление возможно без каких-либо ограничений, имеющих место в [7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bruck Yu. M. and Sodin L. G.** On the ambiguity of the image reconstruction problem.— Opt. Com., 1979, v. 30, N 3.
2. **Hayes M. H.** The reconstruction of a multidimensional sequence from the phase or magnitude of its Fourier transform.— IEEE Trans., 1982, v. ASSP-30, N 2.
3. **Бакалов В. П.** О возможности восстановления многомерных дискретных сигналов по амплитудному спектру.— Радиотехника, 1982, № 11.
4. **Бакалов В. П.** Двумерные пространственно-ограниченные непрерывные сигналы, восстанавливаемые по амплитудному спектру.— Автометрия, 1985, № 2.
5. **Hayes M., McClellan J.** Reducible polynomials in more than one variable.— Proc. IEEE, 1982, v. 70, N 2.
6. **Labeyrie A.** Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star image.— Astronomy and Astrophysics, 1970, v. 6.
7. **Бакут П. А. и др.** Апостериорная пространственная фильтрация искаженного атмосферой короткоэкспозиционного изображения.— Опт. и спектр., 1982, т. 53, № 1.
8. **Бакут П. А. и др.** О возможности восстановления неискаженного атмосферой изображения объекта по одной его пятенной интерферограмме.— Опт. и спектр., 1984, т. 57, № 1.

Поступила в редакцию 11 января 1985 г.