том параметра оптимальности. Число каналов коррелятора при оценке частоты $N = \Delta F/\Delta f_0$ зависит от области изменения оцениваемой частоты ΔF и точности оценки частоты Δf_0.

Указанной точности оценки соответствует апертура коррелятора

$$D_{x_0} = K\Delta f_0^{-1} = 1{,}22\Delta f_0^{-1}\sqrt{1-\mu_0}. \tag{24}$$

При $D_x > D_{x0}$ возможно появление аномальных ошибок в оценке частоты в том случае, когда частота основной гармоники изображения квазипериодической поверхности попадает в область между двумя соседними каналами, сдвинутыми по частоте на Δf_0. При $D_x < D_{x0}$ увеличивается вероятность нормальной ошибки, т. е. принятия в качестве оцениваемой частоты одного из соседних каналов. Минимальный уровень параметра оптимальности зависит от отношения сигнал/шум, вероятности нормальной (или аномальной) ошибки при оценке частоты и определяется аналогично случаю обнаружения изображения квазипериодической поверхности.

Полученный алгоритм неоптимальной адаптивной обработки зашумленных изображений квазипериодических поверхностей может быть реализован как в цифровых, так и в аналоговых процессорах В. [10] предложена схема адаптивного оптического коррелятора, реализующего полученный алгоритм. В зависимости от типа решаемой задачи возможна максимизация вероятности обнаружения входного изображения или минимизация ошибки при оценке частоты входного изображения квазипериодической поверхности.

В результате анализа алгоритма неоптимальной корреляционной обработки зашумленных изображений квазипериодических поверхностей:

1) найдена область, в пределах которой изменение частоты входного изображения относительно опорного не вызывает снижения вероятности обнаружения ниже заданного порога;

2) получено условие для апертуры корреляционного процессора, открывающее возможность неоптимальной обработки входного изображения с использованием одного опорного гармонического транспаранта;

3) найдены оптимальные размеры апертуры коррелятора для оценки частоты входного изображения квазипериодической поверхности с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алявдин М. С. и др.** Корреляция с эталоном — эффективный метод выявления анизотропных свойств изображения.— Автометрия, 1980, № 3.
2. **Автоматизированные** системы обработки изображений (АСОИз—81).— В кн.: Тез. докл. I Всесоюз. конф. М.: Наука, 1981, с. 182—213.
3. **Аэрокосмические** исследования Земли. Методы обработки видеоинформации с использованием ЭВМ.— М.: Наука, 1978.
4. **Давыдов В. Т., Нежевенко Е. С.** Спектральный анализ изображений в оптико-электронном процессоре.— Автометрия, 1977, № 5.
5. **Живичин А. Н., Соколов В. С.** Дешифрирование фотографических изображений.— М.: Недра, 1980.
6. **Базарский О. В., Коржик Ю. В.** Оценка параметров изображений квазипериодических поверхностей при наличии помех.— В кн.: Тез. докл. IV Всесоюз. школы по оптической обработке информации. Минск: Высшая школа, 1982, ч. I.
7. **Hester C. F., Casasent D.** Multivariant technique for multiclass pattern recognition.— Appl. Opt., 1980, v. 19, N 11.
8. **Куликов Е. И., Трифонов А. П.** Оценка параметров сигналов на фоне помех.— М.: Сов. радио, 1978.
9. **Красильников И. Н.** Статистическая теория передачи изображений.— М.: Связь, 1976.
10. **А. с. 1101855 (СССР).** Оптический коррелятор/О. В. Базарский, Ю. В. Коржик.— Опубл. в Б. И., 1984, № 25.

Поступило в редакцию 24 июня 1983 г.

УДК 51.74 : 615.471

О. Е. ТРОФИМОВ

(Новосибирск)

О ТЕОРЕМЕ КОТЕЛЬНИКОВА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В рентгеновской и ультразвуковой томографии естественной решеткой, в узлах которой задаются исходные данные, является равномерная решетка в полярных координатах [1—3]. При выборе шага дискретизации обычно ссылаются на теорему отсчетов [3]. Однако полярная сетка принципиально отличается от прямоугольной тем, что расстояния между отсчетами возрастают и имеется выделенная точка — начало координат. В этой связи возникает задача об аналогах теоремы Котельникова для полярных решеток. Пусть KR — класс функций двух переменных, фурье-спектр которых содержится в круге с радиусом, равным R, и центром в нуле. Можно ли указать $(\Delta r, \Delta\varphi)$ — шаги дискретизации в полярных координатах r и φ такие, что любая функция из класса KR может быть восстановлена по своим значениям на соответствующей решетке? Ниже будут приведены примеры, показывающие, что ответ на поставленный вопрос отрицательный. Из класса KR выделяются также подклассы KRN $(N = 1, 2)$ функций вида

$$f(r, \varphi) = \sum_{k=-N}^{N} f_k(r)\, e^{ik\varphi},$$

для которых справедлива теорема Котельникова.

Пусть $f(z)$ — функция двух переменных ($z = re^{i\varphi}$ — точка двумерной плоскости). Если $f(z) = f(r)\exp(ik\varphi)$, где k — целое число, то двумерное преобразование Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ функции $f(z)$ имеет вид

$$\tilde{f}(\lambda) = F(\rho)\exp(ik\theta),$$

$\lambda = \rho e^{i\theta}$ — аргумент преобразования Фурье [4]. Функция $F(\rho)$ есть преобразование Бесселя k-го порядка от $f(r)$:

$$F(\rho) = 2\pi(-i)^k \int_0^\infty f(r)\, J_k(2\pi\rho r)\, r dr = 2\pi i^k \int_0^\infty f(r)\, J_{-k}(2\pi\rho r)\, r dr, \tag{1}$$

$J_k(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta} e^{ik\theta}\, d\theta$ — функция Бесселя k-го порядка.

Отметим, что при обратном двумерном преобразовании Фурье функции $F(\rho)e^{ik\theta}$ функция $f(r)$ вычисляется по формулам, аналогичным (1). Из равенства $J_k(t) = J_{-k}(t)$ следует, что преобразование Фурье функции $f(z) = f(r)\exp(-ik\varphi)$ имеет вид $\tilde{f}(\lambda) = F(\rho)\exp(-ik\theta)$ с той же функцией $F(\rho)$, следовательно, $\tilde{f}(\lambda) = F(\rho)\cos k\theta$ для действительной функции $f(z) = f(r)\cos k\varphi$.

Итак, пусть задано число R. Выберем функцию $F_0(\rho) \in L_2$ одного переменного ρ такую, что $F_0(\rho) = 0$ при $|\rho| > R$. Для того чтобы получить быстроубывающую и хорошо интегрируемую функцию $f(r)$, $F(\rho)$ можно взять достаточно гладкой. Рассмотрим радиальную функцию двух переменных $F_{0r}(\lambda) = F_{0r}(\rho e^{i\theta}) = F_0(\rho)$. Ее обратное преобразование Фурье $f_{0r}(re^{i\varphi}) = f_0(r)$ — тоже радиальная функция. Функции вида $f_0(r)\cos k\varphi$ будут иметь преобразование Фурье, равное $F_0(\rho)\cos k\theta$. Но $F_0(\rho)$ была выбрана финитной, следовательно, функции $f_0(r)\cos k\varphi$ будут иметь спектр, содержащийся в круге радиуса R. Для любого, равномерного по φ шага $\Delta\varphi = 2\pi/k$ функция $f_0(r)\cos k\varphi$ равна нулю на лучах вида $k\varphi = \pi/2 + 2\pi n$, расстояние между которыми по углу равно $\Delta\varphi$. Однако функция $f_0(r)\cos k\varphi$ отлична от тождественного нуля.

Построенная выше сетка лучей не содержит луч, соответствующий $\varphi = 0$. Для того чтобы получить функцию, равную нулю, на семействе лучей, содержащем луч $\varphi = \varphi_0$ для любого заданного значения φ_0, достаточно повернуть функцию на нужный угол, что приведет к повороту спектра на тот же угол и, следовательно, не изменит его финитности. Построенные примеры показывают, что финитности спектра недостаточно для восстановления функции по равномерной решетке в полярных координатах.

Известно [4], что пространство L_2 суммируемых с квадратом функций двух переменных разлагается в прямую сумму подпространств S_k функций вида $\{f(r)\exp(ik\varphi)\}$. Таким образом, любая функция из L_2 может быть представлена в виде

$$f(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k(r)\, e^{ik\varphi}. \tag{2}$$

Приведенные выше примеры показывают, что восстановлению функций с финитным спектром по значениям на полярной сетке препятствует наличие составляющих в выражении (2) при больших k. Пусть KRN — класс функций двух переменных, принадлежащих L_2, спектр которых содержится в круге радиуса R, представимых в виде

$$f(r, \varphi) = \sum_{k=-N}^{N} f_k(r)\, e^{ik\varphi}. \tag{3}$$

Для таких классов можно выбрать равномерный шаг по r и φ так, чтобы любая функция из класса KRN восстанавливалась по значениям на соответствующей ему решетке. Действительно, если выбрать $\Delta\varphi = 2\pi/(2N+1)$, то по значениям $\{f(r, 2\pi S/(2N+1))\}$; $\{S = 1, \ldots, 2N+1\}$, можно определить функции $f_k(r)$ в формуле (3) при любом $r \neq 0$. Это следует из того, что соответствующий определитель есть определитель дискретного преобразования Фурье, отличный от нуля. Если рассматривать лишь действительные функции из класса KRN, то достаточно взять $\Delta\varphi = 2\pi/(N+1)$, так как для действительных функций $f_k(r) = f_{-k}(r)$. Таким образом, при соответствующем выборе шага по φ можно считать известной каждую составляющую $f_k(r)$. Если покажем, что при сделанных предположениях функции $f_k(r)$ имеют финитный спектр Фурье, то для выбора Δr — шага дискретизации по r — можно будет воспользоваться теоремой Котельникова.

Пространства S_k инвариантны относительно преобразования Фурье. Следовательно, если $f(z) \in KRN$, то

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{k=-N}^{N} F_k(\rho)\, e^{ik\theta}.$$

Функция $\tilde{f}(\lambda)$, по предположению, имеет спектр, содержащийся в круге радиуса R. Из неравенства нулю указанного выше определителя следует, что все функции $F_k(\rho)$ равны нулю при $\rho > R$. Итак, имеется функция двух переменных $f_k(r)e^{ik\varphi}$ такая, что ее двумерное преобразование Фурье финитно, или, что то же самое, одномерное преобразование Бесселя k-го порядка финитно. Нужно показать, что отсюда следует финитность спектра Фурье функции $f_k(r)$. Рассмотрим двумерное обратное преобразование Фурье функции $F_k(\rho)e^{ik\theta}$, которое может быть представлено в виде преобразования Радона $F(\rho)e^{ik\theta}$ и обратного одномерного преобразования Фурье на каждом луче [5]:

$$\begin{tikzcd} F_k(\rho)e^{ik\theta} \arrow[rr, "\Phi_2^{-1}"] \arrow[dr, "R"'] & & f_k(r)e^{ik\varphi} \\ & RF_k(\rho,\varphi) \arrow[ur, "\Phi_1^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

R — преобразование Радона функции $F_k(\rho)e^{ik\theta}$, т. е. $RF_k(\rho, \psi)$ — интеграл функции $F_k(\rho, \varphi)$ по прямой, ортогональной лучу $\{\varphi = \psi\}$ и отстоящей от начала координат на расстоянии ρ; Φ_1^{-1} — одномерное обратное преобразование Фурье на луче с фиксированной координатной φ. Таким образом, $RF_k(\rho, \varphi) = \tilde{f}_k(\rho)e^{ik\varphi}$ при любом φ, где $\tilde{f}_k(\rho)$ — одномерное обратное преобразование Фурье $f_k(r)$. Если функция $F_k(\rho)e^{ik\theta}$ финитна, то ее преобразование Радона финитно, и, следовательно, функция $f_k(r)$ имеет финитный спектр.

Финитность носителя $\tilde{f}_k(r)$ можно показать и непосредственными выкладками. Пусть некоторая функция $f_2(\rho, \varphi)$ в полярных координатах имеет вид

$$f_2(r, \theta) = f_1(r)e^{ik\theta}, \quad \rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Тогда ее преобразование Фурье в полярных координатах распадается на произведение сомножителей, один из которых зависит только от модуля, другой — только от фазы:

$$\tilde{f}_2(r, \theta) = \hat{f}_1(r)e^{ik\theta}, \quad \rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Нам нужно показать, что если $\hat{f}_1(r) = 0$ при $r > R$, то одномерное преобразование Фурье $f_1(\rho)$ имеет финитный носитель. Пусть $F_2(x_1, x_2)$ есть функция $f_2(\rho, \varphi)$, записанная в прямоугольных координатах, т. е.

$$F_2(x_1, x_2) = f_2\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi(x_1, x_2)\right);$$

$$\tilde{F}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{f}_2\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad \varphi(\lambda_1, \lambda_2)\right),$$

где $\tilde{F}_2(\lambda_1, \lambda_2)$ — преобразование Фурье $F_2(x_1, x_2)$, а $\varphi(x_1, x_2)$ — фаза комплексного числа $x_1 + ix_2$. Тогда $f_1(\rho) = f_2(\rho, 0) = F_2(\rho, 0)$. Поскольку

$$F_2(x_1, x_2) = \int\int \tilde{F}_2(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{-i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}\, d\lambda_1 d\lambda_2,$$

то

$$F_2(\rho, 0) = \int\int \tilde{F}_2(\lambda_1, \lambda_2)\, e^{-i\rho\lambda_1} d\lambda_1 d\lambda_2 = \int e^{-i\lambda_1\rho}\left(\int \tilde{F}_2(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_2\right) d\lambda_1,$$

т. е. преобразование функции $f_1(\rho)$ есть функция

$$G(\lambda_1) = \int \tilde{F}_2(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_2.$$

В наших предположениях $G(\lambda_1)$ имеет финитный носитель, действительно,

$$G(\lambda_1) = \int \hat{F}_2(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_2 = \int \hat{f}_1\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right) e^{ik\theta(\lambda_1, \lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

но $\widehat{f}_1(r) = 0$ при $r > R$. Следовательно, $\widehat{f}_1\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right) = 0$ для всех λ_2 при $|\lambda_1| > r$.

Итак, любую действительную функцию из класса KRN можно восстановить по отсчетам на равномерной полярной сетке, если выбрать $\Delta\varphi = 2\pi/(N+1)$, $\Delta r = \pi/R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баррет Х. Х., Суиндел У.** Аналоговые методы восстановления вида объекта при трансаксиальной томографии.— ТИИЭР, 1977, т. 65, № 1.
2. **Жирнов В. Т., Смирнов К. К., Трофимов О. Е.** О численных методах решения задач томографии.— В кн.: Методы и средства обработки изображений. Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1982.
3. **Leavit S. C., Hunt B. F., Larsen H. C.** A scan conversion algorithm for displauing ultrasound images.— Hewelett Packard J., 1983, v. 34, N 10.
4. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.
5. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Обобщенные функции. Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.— М.: Физматгиз, 1962.

Поступило в редакцию 19 сентября 1984 г.