

2. Захаров В. М., Костко О. К. Метеорологическая лазерная локация—Л.: Гидрометеиздат, 1977.
3. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.—М.: Сов. радио, 1977.
4. Хргиан А. Х. Физика атмосферы.—Л.: Гидрометеиздат, 1978, т. 1.
5. Справочник статистических характеристик температуры и влажности в свободной атмосфере над СССР/Под ред. В. С. Комарова.—М.: Гидрометеиздат, 1972.
6. Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема.—М.: Сов. радио, 1973.
7. Астафуров В. Г., Глазов Г. Н. Статистика фотоотчетов и режимы регистрации лидарного сигнала.—В кн.: Дистанционное зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1978.

Поступила в редакцию  
11 февраля 1984 г.

УДК 543.4

В. В. ЛАВРЕНТЬЕВ, В. В. РЯБОВ, Г. В. СМИРНОВ

(Ленинград)

## ОЦЕНКА ВОЛНОВОГО ФРОНТА ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

При решении задач, связанных с анализом источников и структуры излучения, а также при формировании сигналов, управляющих активной оптикой, возникает задача оценки волнового фронта оптического излучения.

**Постановка задачи.** Будем предполагать, что волновой фронт, представляющий собой трехмерную поверхность, допускает параметрическое описание, которое в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  можно задать в виде

$$x_3 = Y(x_1, x_2, \theta), \quad (1)$$

где  $Y(x_1, x_2, \theta)$  — функция, описывающая множество реализаций волнового фронта;  $\theta = [\theta_1 : \theta_2 : \dots : \theta_n]^T$  — вектор параметров, характеризующий реализацию. Если  $Y(x_1, x_2, \theta)$  — аналитическая функция переменных  $x_1, x_2$ , то для ее параметрического представления с заданной точностью может быть использован полином от двух переменных соответствующей степени. Коэффициенты этого полинома образуют вектор параметров  $\theta$ .

Параметрическое представление множества реализаций волнового фронта позволяет сформулировать задачу восстановления волнового фронта как задачу оценки вектора параметров  $\theta$ , отвечающих наблюдаемой реализации.

В работе рассматривается решение поставленной задачи методом наименьших квадратов при полиномиальном представлении модели поверхности (1) по измерениям локальных наклонов волнового фронта с помощью гартмановского датчика [1].

**Модель наблюдений.** Будем считать, что система координат  $x_1, x_2, x_3$  выбрана так, что

$$Y(0, 0, \theta) = 0. \quad (2)$$

Тогда в общем случае полиномиальное параметрическое представление функции  $Y(x_1, x_2, \theta)$  примет вид

$$Y(x_1, x_2, \theta) = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + x_1x_2\theta_3 + x_1^2\theta_4 + \dots + x_1^m x_2^l \theta_n, \quad (3)$$

где  $k, l, m$  — целые числа, определяющие вид полинома. Функция (3) линейна по параметрам, и для ее записи обычно используют векторную

форму

$$Y(x_1, x_2, \theta) = f^T(x_1, x_2)\theta, \quad (4)$$

где

$$f^T(x_1, x_2) = [x_1^k : x_2^l : x_1 x_2 : x_1^2 : \dots : x_1^m x_2^l] \quad (5)$$

— вектор-строка заданных функций.

Локальные наклоны волнового фронта, измеряемые с помощью гартмановского датчика, представляют собой частные производные функции  $Y(x_1, x_2, \theta)$  в точках, определяемых расположением отверстий маски датчика. Поэтому результат измерения  $z_j^i$  локального наклона в плоскости  $j$ -й координаты  $x_j$  в  $i$ -й точке  $(x_1^i, x_2^i)$  с учетом модели (4) можно записать в виде

$$z_j^i = \frac{\partial f^T(x_1^i, x_2^i)}{\partial x_j} \theta + v_j^i. \quad (6)$$

Здесь  $v_j^i$  — ошибка результата в  $i$ -й точке, учитывающая ошибки измерения локального наклона и ошибку представления волнового фронта полиномом заданного вида ( $k, l, m$  фиксированы).

Для гартмановской маски, имеющей  $N$  отверстий, массив результатов измерений будет представлять собой вектор  $Z = [z_1^1 z_2^1 \dots z_1^N z_2^N]^T$ , структура которого с учетом (6) имеет вид

$$Z = H\theta + V, \quad (7)$$

где  $H$  — матрица, называемая планом эксперимента и составленная из  $2N$  вектор-строк вида  $\frac{\partial f^T(x_1^i, x_2^i)}{\partial x_j}$ ;  $V = [v_1^1 : v_2^1 : v_1^2 : v_2^2 : \dots : v_1^N : v_2^N]^T$  — вектор ошибок.

Соотношение (7) представляет собой линейную по параметру модель наблюдений [2] при условии, что математическое ожидание вектора ошибок равно нулю:

$$E[V] = 0. \quad (8)$$

Условие (8) эквивалентно тому, что параметрическая модель (4) при заданных  $k, l, m$  адекватно описывает волновой фронт. Это означает, что для принятой модели существует такое значение вектора параметров  $\theta$ , что отклонение истинной поверхности волнового фронта от поверхности  $x_3 = Y(x_1, x_2, \theta)$  не различимо на фоне ошибок измерения. Будем предполагать, что условие (8) выполнено и ковариационная матрица  $R_z$  вектора  $Z$  имеет вид

$$R_z = \sigma^2 I, \quad (9)$$

где  $I$  — единичная матрица порядка  $2N$ ;  $\sigma^2$  — дисперсия измерения локального наклона.

Условие (9) означает, что измерения локальных наклонов волнового фронта в различных точках маски и в различных направлениях не коррелированы и равноточны. Это условие не является существенным ограничением. Если оно не выполняется ( $R_z \neq \sigma^2 I$ ), но  $R_z$  — неособая матрица, то линейную модель наблюдений (7) с помощью декоррелирующего преобразования [2] можно эквивалентно представить таким образом, что относительно преобразованного вектора измерений условие (9) будет иметь место.

**Оценка волнового фронта.** При полиномиальном представлении модели волнового фронта план  $H$  будет иметь полный ранг, а информационная матрица  $H^T H$  этого плана будет неособой. Поэтому оценка  $\theta$  по методу наименьших квадратов единственна [2]:

$$\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T Z. \quad (10)$$

С учетом (8), (9) оценка (10) является наилучшей линейной несмещенной оценкой параметра  $\theta$ , с помощью которой находится наилучшая ли-

нейная несмещенная оценка волнового фронта

$$\hat{Y}(x_1, x_2, \theta) = f^T(x_1, x_2)\hat{\theta}. \quad (11)$$

Ошибка оценки  $\hat{Y}(x_1, x_2, \theta)$  функции  $Y(x_1, x_2, \theta)$  зависит от координат  $x_1, x_2$  и может быть охарактеризована коридором ошибок  $\pm d(x_1, x_2)$ , где

$$d^2(x_1, x_2) = f^T(x_1, x_2)R_{\hat{\theta}}f(x_1, x_2), \quad (12)$$

а

$$R_{\hat{\theta}} = \sigma^2(H^T H)^{-1} \quad (13)$$

— ковариационная матрица оценки  $\hat{\theta}$ .

В тех случаях, когда дисперсия  $\sigma^2$  однократного измерения локального наклона не известна, а модель (4) адекватна, в качестве значения  $\sigma^2$  в (13) используют несмещенную оценку дисперсии [2], которая в рассматриваемой задаче вычисляется по формуле

$$\hat{\sigma}^2 = (Z - H\hat{\theta})^T(Z - H\hat{\theta}) / (2N - K). \quad (14)$$

**Условие адекватности модели.** Выражение (14) определяет несмещенную оценку  $\sigma^2$ , и оценка (11) с характеристикой точности (12) будет иметь смысл, если принятая для представления волнового фронта модель является адекватной. Поэтому практическое использование результата оценки волнового фронта должен предварять анализ адекватности модели. Поскольку каждая реализация волнового фронта допускает лишь однократные измерения, то для анализа адекватности модели не представляется возможным использовать тест проверки [2], основанный на сравнении оценки (14), зависящей от вида модели, с оценкой дисперсии, получаемой путем многократных измерений одной реализации в каждой точке плана и не связанной с видом модели. В этих условиях для подтверждения анализа адекватности модели необходимы дополнительные априорные данные.

Минимальная дополнительная информация для анализа адекватности модели связана с предположением о гауссовом распределении ошибок измерения. Тогда если  $\sigma^2$  — дисперсия ошибки однократного измерения, то с уровнем значимости  $\alpha$  модель будет адекватной при

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} (2N - K) < \chi_{1-\alpha}^2 (2N - K), \quad (15)$$

где  $\hat{\sigma}^2$  — оценка (14);  $\chi_{1-\alpha}^2 (2N - K)$  — квантиль уровня  $1 - \alpha$  распределения  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $2N - K$ .

Если значение  $\sigma^2$  известно, то результат сравнения (15) определяет классификацию испытуемой модели по признаку адекватности. При этом невыполнение условия (15) означает, что при данном уровне ошибок измерения и уровне значимости критерия проверки  $\alpha$  модель (4), принятая для представления волнового фронта, и связанная с ней модель наблюдений (7) не согласуются с результатами наблюдений. В этом случае модель следует усложнить, увеличив число членов полинома (3).

Если значение  $\sigma^2$  не известно, то неравенство (15), записанное относительно  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2 > \frac{\hat{\sigma}^2}{\chi_{1-\alpha}^2 (2N - K)} (2N - K), \quad (16)$$

определяет классификацию условий измерения по признаку адекватности испытуемой модели. При этом правая часть неравенства (16) задает нижнюю границу дисперсии ошибки однократного измерения, при которой испытуемая модель будет адекватной.

**Пример.** Найдём оценку волнового фронта по массиву данных гартмановского датчика, приведенных в таблице. Маска квадратная, имеет  $25 = 5 \times 5$  отверстий, расположенных в плоскости  $x_1, x_2$  с единичным шагом. Начало координат в плоскости  $x_1, x_2$  совмещено с центром маски.

$i$	$x_1^i$	$x_2^i$	$z_1^i$	$z_2^i$	$i$	$x_1^i$	$x_2^i$	$z_1^i$	$z_2^i$
1	-2	-2	-0,278	0,278	13	0	0	-0,278	0,278
2	-2	-1	-0,15	0,15	14	0	1	-0,15	0,15
3	-2	0	0	0	15	0	2	0	0
4	-2	1	0,15	-0,15	16	1	-2	-0,363	0,363
5	-2	2	0,278	-0,278	17	1	-1	-0,393	0,393
6	-1	-2	-0,363	0,363	18	1	0	-0,363	0,363
7	-1	-1	-0,278	0,278	19	1	1	-0,278	0,278
8	-1	0	-0,15	0,15	20	1	2	-0,15	0,15
9	-1	1	0	0	21	2	-2	-0,278	0,278
10	-1	2	0,15	-0,15	22	2	-1	-0,363	0,363
11	0	-2	-0,393	0,393	23	2	0	-0,393	-0,393
12	0	-1	-0,363	0,363	24	2	1	-0,363	0,363
					25	2	2	-0,278	0,278

Для описания волнового фронта исследуем две модели: квадратичную вида

$$Y(x_1, x_2) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1 x_2 + \theta_4 x_1^2 + \theta_5 x_2^2 \quad (17)$$

и кубическую

$$Y(x_1, x_2) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1 x_2 + \theta_4 x_1^2 + \theta_5 x_2^2 + \theta_6 x_1^3 + \theta_7 x_2^3. \quad (18)$$

Для данной маски и кубической модели (18) информационная матрица  $H^T H$ , требующая обращения при вычислении оценки (10), будет равна

$$H^T H = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ \hline 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1530 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1530 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Заметим, что информационная матрица не зависит от результатов измерений и для модели заданной структуры является характеристикой маски. Подматрица, ограниченная в (19) пунктиром, совпадает с информационной матрицей для квадратичной модели (17). Поскольку информационная матрица квадратичной модели диагональна, ее обращение при вычислении оценки (10) тривиально.

Для обращения матрицы (19) используем теперь формулу обращения блочных симметрических матриц [3]. В соответствии с ней, если  $A$  и  $D$  — симметрические матрицы, то

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + FE^{-1}F^T & -FE^{-1} \\ -E^{-1}F^T & E^{-1} \end{bmatrix};$$

$$E = D - B^T A^{-1} B,$$

$$F = A^{-1} B$$

при условии, что все перечисленные операции имеют смысл. Применяя указанную формулу к (19), получим

$$(H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,097 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0095 & 0 \\ 0 & 0,097 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0095 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,005 & 0 & 0 \\ \hline -0,0095 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0016 & 0 \\ 0 & -0,0095 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0016 \end{bmatrix}$$

Нахождение остальных величин (10)–(12), (14) специальных приемов не требует.

Вычисления для случая квадратичной модели приводят к следующим результатам:

$$\hat{Y}(x_1, x_2) = -0,202x_1 + 0,202x_2 + 0,077x_1x_2 - 0,043x_1^2 - 0,043x_2^2;$$

$$\hat{\sigma}^2 = 8,37 \cdot 10^{-3},$$

и с уровнем значимости  $\alpha = 0,1$  квадратичная модель адекватна, если дисперсия  $\sigma^2$  однократного измерения локального наклона удовлетворяет

$$\hat{Y}(x_1, x_2) = -0,24x_1 + 0,24x_2 + 0,077x_1x_2 - 0,043x_1^2 - 0,043x_2^2 +$$

$$+ 5,75 \cdot 10^{-3}x_1^3 - 5,75 \cdot 10^{-3}x_2^3,$$

$$\hat{\sigma}^2 = 7,74 \cdot 10^{-3}.$$

С уровнем значимости  $\alpha = 0,1$  кубическая модель адекватна, если дисперсия  $\sigma^2$  однократного измерения локального наклона удовлетворяет условию

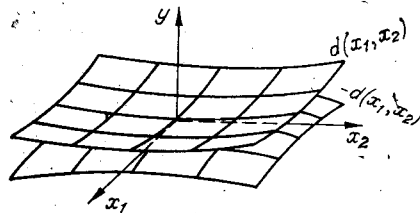
$$\sigma^2 > \frac{0,333}{\chi_{0,9}^2(43)} \approx \frac{0,333}{55} = 6,0 \cdot 10^{-3}.$$

Для кубической модели функция (12), определяющая коридор ошибок, имеет вид

$$d^2(x_1, x_2) = \sigma^2 [9,7 \cdot 10^{-2}(x_1^2 + x_2^2) + 0,98(x_1^4 + x_2^4) +$$

$$+ x_1^2x_2^2 + 1,6 \cdot 10^{-3}(x_1^6 + x_2^6)],$$

а рисунок иллюстрирует коридор ошибок  $\pm d(x_1, x_2)$ . Максимальная ошибка оценки волнового фронта имеет место в угловых точках маски и для кубической модели оценивается величиной  $d(x_1, x_2) = \pm 6,95\sigma$ . Ошибка оценки минимальна в начале координат, причем минимальное значение  $d(x_1, x_2) = 0$ . Нулевое значение  $d(x_1, x_2)$  в начале координат обусловлено тем, что для представления волнового фронта принимается модель, удовлетворяющая условию  $Y(0, 0, \theta) = 0$ , не зависящему от результатов измерения.



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Дж. У. Активная оптика.— ТИИЭР, 1978, т. 66, № 6.
2. Асатурян В. И. Теория планирования эксперимента.— М.: Радио и связь, 1983.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию  
2 июня 1984 г.