метрической степеням свободы; h, K — коэффициенты связи ($h \ll 1$, $K \gg 1$).

В [10] показано, что, задавая частоты собственных колебаний ω_{0x} и ω_{0y} в определенной пропорции, например $\omega_{0y} = 3\omega_{0x}$, и обеспечивая малую величину коэффициентов ε_x и ε_y, можно получать дискретные отсчеты первой производной сигнала $\dot{f}(t_n)$, усиленные в $K \gg 1$ раз:

$$y(t_n) \simeq -\frac{1}{9}\frac{K}{\omega_1^4}\dot{f}(t_n);$$
$$\omega_1 \approx \omega_{0x} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_x^2}{\omega_{0x}}. \tag{11}$$

Восстановление при необходимости самого сигнала возможно применением методов численного интегрирования по полученному массиву данных $\{\dot{f}(t_n)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марчук Г. И., Дробышев Ю. П.** Некоторые вопросы линейной теории измерений.— Автометрия, 1967, № 3, с. 24—30.
2. **Маергойз М. Д., Рудько Б. Ф.** О некоторых математических вопросах нелинейной теории измерений.— Автометрия, 1976, № 2, с. 3—10.
3. **Краус М., Вошни Э.** Измерительные информационные системы.— М.: Мир, 1975.
4. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
5. **Абгарян А. Л., Богданов В. В., Киселев М. И.** О качественной теории измерительных систем.— Метрология, 1975, № 10, с. 13.
6. **Абгарян А. А., Богданов В. В., Киселев М. И.** О качественной теории измерительных систем с адиабатическими инвариантами.— Метрология, 1975, № 11, с. 45.
7. **Киселев М. И., Кузиванов В. А.** О возможности измерений в геофизике слабодемпфированными системами.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 4, с. 853—856.
8. **Гальперин М. В.** Квантование времени в информационных системах.— М.: Энергоатомиздат, 1983.
9. **Аппаратура** и методика сейсмометрических наблюдений в СССР/Под ред. В. Т. Архангельского и др.— М.: Наука, 1974.
10. **Бростюк В. В., Киселев М. И., Кузиванов В. А.** О возможности применения высокодобротных сейсмометров.— ДАН СССР, 1982, т. 265, № 5, с. 1097—1100.

Поступила в редакцию
11 июня 1984 г.

УДК 531.714

Л. К. РЕЗНИК

(Ленинград)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН

Введение. Автоматизация измерений и испытаний привела к интеграции операций проведения измерений и обработки их результатов в рамках измерительно-вычислительных комплексов (ИВК), являющихся ядром автоматизированных измерительных систем (АИС), и к освобождению от их выполнения человека-оператора. В АИС измерительными операциями управляет ЭВМ, обладающая значительной вычислительной мощностью, но, разумеется, не имеющая тех знаний и профессиональной интуиции, которыми часто умело пользуется опытный экспериментатор. Объединение при проведении измерений высокой производительности ЭВМ и опыта экспериментатора ведет к повышению эффективности функционирования всей системы в целом.

В статье рассматривается одна задача этой тематики — повышение точности получаемых по результатам измерений оценок на основе использования нечеткой априорной информации, сообщаемой экспериментатором о примерных значениях измеряемых величин и связях между ними. Априорная информация обычно состоит из предсказаний экспериментатора типа «давление в отсеке 1 примерно равно m», «зависимость между величинами B и C близка к линейной» и т. п.

Методы и модели описания априорной информации. Весьма приблизительный характер априорной информации и требование ее простого описания обусловливают применение моделей теории нечетких множеств (ТНМ). Это объясняется тем, что модели ТНМ предназначены для описания субъективных, не имеющих статистического характера сведений, включают модели лингвистических переменных, используемых для описания сведений, выражаемых на естественном или близком к нему языке, имеют достаточно простой математический аппарат обработки, включающий логические и алгебраические операции.

Для описания конкретной априорной информации разработан ряд моделей вида нечеткой переменной [1], краткое описание которых приведено в таблице. Правила выполнения арифметических и логических операций над этими моделями даны в [2]. Это позволяет проводить предварительную обработку априорной информации.

Постановка и решение задачи обработки результатов измерений с учетом нечеткой информации. Традиционным методом решения задачи оценивания по результатам измерений являются ее формализация как задачи математического программирования и нахождение оценок параметров X из условия

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, X) \to \max_X,$$

где $F(\cdot)$ — функционал, вид которого определяется используемыми методами оценивания; Y_i $(i=\overline{1, n})$ — совокупность m_i результатов измерений i-й величины. Априорную информацию будем рассматривать как нечеткие ограничения, наложенные на параметр и задаваемые функциями принадлежности $\mu(f(X))$. Задача оценивания с использованием априорной информации может быть формализована в качестве задачи нечеткого математического программирования и решена на основе принципа слияния целей и ограничений Беллмана-Заде. В результате решения задачи модифицированная с учетом априорной информации оценка находится из условия

$$F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, X)\,\mu\,(f(X)) \to \max_X.$$

Эта задача решается классическими методами.

Исследование свойств модифицированных оценок. Проведенное исследование свойств модифицированных оценок позволяет сделать следующие утверждения.

Утверждение 1. Модифицированная оценка совпадает с традиционной тогда и только тогда, когда значение величины предсказания совпадает с традиционной оценкой.

Следствие 1. Модифицированная оценка в общем случае смещена относительно традиционной.

Утверждение 2. Модифицированная оценка лежит в интервале, образованном традиционной оценкой и величиной предсказания.

Следствие 2. Смещение модифицированной оценки относительно традиционной происходит в сторону предсказанных значений.

Однако наибольший интерес в измерительных задачах представляют свойства оценки, характеризующие ее точность. Начнем исследование оценок с наиболее распространенного на практике нормального закона распределения результатов измерений и предсказаний вида примерного равенства по следующей схеме:

$$Y = AX + \varepsilon_y; \tag{1}$$

$$b \approx BX, \tag{2}$$

где $Y - n \times 1$ — вектор (при $n > 1$) результатов измерений; $X - K \times 1$ — вектор (при $K > 1$) истинных значений измеряемых величин; $\varepsilon_y - n \times \times 1$ — вектор (при $n > 1$) погрешностей результатов измерений; $b - m \times \times 1$ — вектор (при $m > 1$) предсказаний экспериментатором значений измеряемых величин; A, B — матрицы, задающие схемы измерений и априорных предсказаний.

Уравнение (1) представляет собой обычное уравнение результатов измерений. Будем считать, что погрешности измерений распределены

Нечеткие переменные

№ п/п	Тип нечеткой переменной	Вид описываемых сведений	Функция принадлежности	Параметры: Количество	Параметры: Значение
1	НПР-переменная	Примерное равенство	$\mu(X) = \exp\left[-\left(\frac{X-m}{\delta}\right)^2\right]$	2	m — значение
2	НПРО-переменная	Примерное равенство на ограниченном интервале	$\mu(X) = \max\left[1-\left(\frac{X-m}{\delta}\right)^2, 0\right]$		δ — размытость
3	НПРА-переменная	Примерное равенство с односторонним смещением	$\mu(X) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{X-m}{\delta_1}\right)^2\right], & X \leqslant m_1; \\ \exp\left[-\left(\frac{X-m}{\delta_2}\right)^2\right], & X > m \end{cases}$	3	m — значение δ_1 — левая размытость δ_2 — правая размытость
4	НПИ-переменная	Примерный интервал	$\mu(X) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{X-m_1}{\delta}\right)^2\right], & X < m; \\ 1, & m_1 \leqslant X \leqslant m_2; \\ \exp\left[-\left(\frac{X-m_2}{\delta}\right)^2\right], & X > m_2 \end{cases}$		m_1 — левая граница интервала m_2 — правая граница интервала δ — размытость
			$\mu(X) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{X-m+\sigma}{\delta}\right)^2\right], & X < m-\sigma; \\ 1, & m-\sigma \leqslant X \leqslant m+\sigma; \\ \exp\left[-\left(\frac{X-m-\sigma}{\delta}\right)^2\right], & X > m+\sigma \end{cases}$	3	m — значение σ — отклонение δ — размытость
		Примерная односторонняя граница			
5	НБП-переменная	«Больше примерно»	$\mu(X) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{X-m}{\delta}\right)^2\right], & X < m; \\ 1, & X \geqslant m \end{cases}$		
6	НПБ-переменная	«Примерно больше»	$\mu(X) = \exp\left[-\ln 2 \exp\frac{m-X}{\delta}\right]$	2	m — значение
7	НМП-переменная	«Меньше примерно»	$\mu(X) = \begin{cases} 1, & X \leqslant m; \\ \exp\left[-\left(\frac{X-m}{\delta}\right)^2\right], & X > m \end{cases}$		δ — размытость
8	НПМ-переменная	«Примерно меньше»	$\mu(X) = \exp\left[-\ln 2 \exp\frac{X-m}{\delta}\right]$		

по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ_y. Уравнение (2) задает предсказания: экспериментатор сделал предсказания о том, что m линейных комбинаций измеряемых величин, задаваемых матрицей B, примерно совпадают с компонентами вектора b. Считаем, что предсказания экспериментатора формализуются заданием их в виде моделей НПР-переменных (см. таблицу) с размытостями, задаваемыми матрицей Σ_b, являющейся диагональной матрицей квадратов размытостей предсказаний.

При этих условиях традиционная оценка максимального правдоподобия равна $\widehat{X} = (A^T\Sigma_y^{-1}A)^{-1}A^T\Sigma_y^{-1}Y$, а модифицированная $-\widetilde{X} = (A^T\Sigma_y^{-1}A + 2B^T\Sigma_b^{-1}B)^{-1}(A^T\Sigma_y^{-1}Y + 2B^T\Sigma_b^{-1}B)$. Смещение и обобщенная дисперсия для этих оценок соответственно равны:

$$M(\widehat{X} - X) = 0;$$

$$\operatorname{cov}(\widehat{X}) = M\left[(\widehat{X} - M\widehat{X})(\widehat{X} - M\widehat{X})^T\right] = (A^T\Sigma_y^{-1}A)^{-1}; \tag{3}$$

$$M(\widetilde{X} - X) = 2\left(A^T\Sigma_y^{-1}A + 2B^T\Sigma_b^{-1}B\right)^{-1}B^T\Sigma_b^{-1}(b - BX);$$

$$\operatorname{cov}(\widetilde{X}) = \left(A^T\Sigma_y^{-1}A + 2B^T\Sigma_b^{-1}B\right)^{-1}A^T\Sigma_y^{-1}A\left(A^T\Sigma_y^{-1}A + 2B^T\Sigma_b^{-1}B\right)^{-1}, \tag{4}$$

где $M(\cdot)$ — оператор математического ожидания.

Очевидно, смещение модифицированной оценки прямо пропорционально ошибкам в предсказаниях $b - BX$, а дисперсия определяется в основном погрешностями результатов измерений. Отсюда видно, что при верном предсказании модифицированная оценка также является несмещенной. Сравнивая величины (3) и (4), можно показать, что модифицированная оценка более эффективна, чем традиционная. Однако вследствие смещенности модифицированной оценки в качестве показателя точности выберем среднеквадратическую ошибку, определяемую математическим ожиданием квадрата отклонения оценки от истинного значения оцениваемой величины. Этот показатель учитывает как дисперсию оценки, так и ее смещение. Среднеквадратические ошибки (СКО) рассмотренных оценок будут равны

$$E_{\widehat{x}} = M\left[(\widehat{X} - X)(\widehat{X} - X)^T\right] = (A^T\Sigma_y^{-1}A)^{-1};$$

$$E_{\widetilde{x}} = \left(A^T\Sigma_y^{-1}A + 2B^T\Sigma_b^{-1}B\right)^{-1}\left(4B^T\Sigma_b^{-1}(b - BX)(b - BX)^T\Sigma_b^{-1}B + \right.$$
$$\left. + A^T\Sigma_y^{-1}A\right)\left(A^T\Sigma_y^{-1}A + 2B^T\Sigma_b^{-1}B\right)^{-1}.$$

Выясним условия, при которых модифицированная оценка превосходит традиционную по этому показателю, т. е. является более точной. Условие $E < E_{\widehat{x}}$ сводится к неравенству

$$B^T\Sigma_b^{-1}(b - BX)(b - BX)^T\Sigma_b^{-1}B < B^T\Sigma_b^{-1}B + B^T\Sigma_b^{-1}B\left(A^T\Sigma_y^{-1}A\right)^{-1}B^T\Sigma_b^{-1}B. \tag{5}$$

Это условие налагает ограничения на ошибку предсказания, величина которой задает левую часть неравенства. Чтобы модифицированная оценка была лучше, ошибка предсказания не должна превосходить некоторой величины, определяемой размытостью предсказаний и погрешностью измерений, а также схемами измерений и предсказаний. Если производятся прямые измерения и предсказания некоррелированных величин, то для следов матриц из условия (5) вытекает

$$\sum_{i=1}^{K}(b_i - x_i)^2/K < \sum_{i=1}^{K}\delta_i^2/K + \sum_{i=1}^{K}\sigma_i^2/K. \tag{6}$$

Таким образом, использование априорной информации приводит к выигрышу в точности получаемых оценок, если средняя ошибка в предсказании величины результата не превосходит суммы средних размытостей предсказаний и погрешностей измерений.

Величина выигрыша, обусловленная следом отношения СКО оценок, равна

$$T = \frac{1}{K}\,\mathrm{Sp}\left(E_{\tilde{x}}^{-1/2} E_{\hat{x}} E_{\tilde{x}}^{-1/2}\right) = \frac{1}{K}\,\mathrm{Sp}\left[\left(A^T \Sigma_y^{-1} A\right)^{-1} \left(A^T \Sigma_y^{-1} A + 2B^T \Sigma_b^{-1} B\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(4B^T \Sigma_b^{-1} (b - BX)(b - BX)^T \Sigma_b^{-1} B + A^T \Sigma_y^{-1} A\right)^{-1} \left(A^T \Sigma_y^{-1} A + 2B^T \Sigma_b^{-1} B\right)\right].$$

Отсюда видно, что величина выигрыша определяется свойствами системы измерений, а также ошибками в предсказаниях и их размытостями, причем с ростом ошибок в предсказаниях величина выигрыша падает. Максимальная величина выигрыша достигается при верных предсказаниях и при измерении одной величины с погрешностью σ и ее предсказании с размытостью δ равна

$$T = 1 + 4\sigma^2/\delta^2 + 4\sigma^4/\delta^4. \qquad (7)$$

Ввиду невозможности получения аналитических зависимостей исследование модифицированной оценки для других моделей предсказаний проводилось методами имитационного моделирования. Исследовалось также использование априорной информации при оценивании параметров различных законов распределения результатов измерений: Рэлея, экспоненциального, двойного экспоненциального. Результаты имитационного моделирования аналогичны аналитическим.

Выводы. На основе проведенных исследований можно предложить следующие краткие рекомендации по назначению и использованию априорной информации:

предложенные методы использования априорной информации для повышения точности получаемых по результатам измерений оценок измеряемых величин следует применять в АИС в сочетании с другими методами, а также в том случае, когда применение других методов технически невозможно или экономически невыгодно;

следует использовать априорную информацию, если ее размытость не более чем на 1—2 порядка превосходит погрешность измерений, а число измерений каждой величины не более 10—20;

нецелесообразно использовать априорную информацию видов «примерное равенство» и «примерный интервал» при двойном экспоненциальном законе распределения результатов измерений;

для повышения выигрыша в точности следует увеличивать число предсказаний и число измеряемых величин, связываемых предсказаниями;

так как с уменьшением размытости предсказаний растет величина выигрыша в точности (7), а величина допустимых ошибок (6) уменьшается, то для повышения точности следует стремиться получать предсказания с меньшей размытостью, но для повышения надежности получения выигрыша — с большей размытостью.

Применение. С целью реализации предложенных методов в АИС разработана комплексная система использования априорной информации при обработке результатов измерений, представляющая собой совокупность алгоритмов и программ описания априорной информации, ввода ее в ЭВМ и обработки для получения оценок. Программы выполнены в рамках ОС РАФОС мини-ЭВМ класса СМ-4 и работают в режиме диалога с экспериментатором.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бритов Г. С., Резник Л. К.** Оптимальное управление линейными нечеткими системами.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 4, с. 66—69.
2. **Резник Л. К.** Математическое обеспечение обработки нечеткой информации экспериментатора в ИВК.— В кн.: Труды ВНИИЭП «Архитектура, модели и программное обеспечение ИИС и ИВК.— Л., 1983, с. 45—55.

Поступила в редакцию
14 января 1985 г.