

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ

(Новосибирск)

ВЫБОР РАЗМЕРНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Постановка задачи. Пусть исследуемая функциональная зависимость представлена измерениями

$$\tilde{f}_i = f(x_i) + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

проведенными на интервале $[x_1, x_n]$, и ξ_i — шум (погрешность) измерения в точке x_i . Требуется по исходным данным $\{x_i, \tilde{f}_i\}$ построить приближение для функции $f(x)$. Без ограничения общности в качестве приближения будем рассматривать элемент

$$S_N(x, \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j(x) \quad (2)$$

N -мерного пространства \mathcal{P}_N с базисными функциями $\{\varphi_j(x)\}$. При построении приближения вида (2) с заданным (из определенных соображений) базисом $\{\varphi_j(x)\}$ возникают задачи: 1) выбора подходящей размерности N пространства \mathcal{P}_N ; 2) вычисления вектора коэффициентов $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$, однозначно определяющего $S_N(x, \mathbf{a})$ в базисе $\{\varphi_j(x)\}$.

Если использование современных методов параметрического оценивания (включая робастное оценивание) позволяет успешно решать вторую задачу, то при выборе размерности возникают трудности, связанные с недостаточной априорной информацией о функции $f(x)$ и с отсутствием (в ряде случаев) данных о числовых характеристиках шума измерения.

В качестве критерия успешного выбора размерности примем среднеквадратическую ошибку приближения, определяемую функционалом

$$\Delta^2(N) = M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - S_N(x_i, \mathbf{a}))^2 \right],$$

где $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания. Размерность $N_{\text{опт}}$, доставляющую минимум этому функционалу, естественно назвать оптимальной. Если размерность $N < N_{\text{опт}}$, то приближение (2) будет соответствовать неполной модели (по терминологии регрессионного анализа) функции $f(x)$ и в построенное приближение не войдут информативные (при данном уровне шума) базисные функции. В случае избыточной размерности $N > N_{\text{опт}}$ будет происходить недостаточное сглаживание шума и в (2) появятся «ложные» составляющие, обусловленные шумом измерения.

Задача выбора размерности возникает также при численной реализации некоторых методов решения некорректно поставленных задач [1], регрессионном анализе [2], идентификации динамических систем [3].

В данной работе излагаются методы и алгоритмы оценивания оптимальной размерности при различной априорной информации.

Построение приближения при заданной размерности пространства. Предположим, что заданы размерность N и набор базисных функций $\{\varphi_j(x)\}$. В этом случае вектор коэффициентов $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$ находится из условия минимума некоторого функционала $F(\mathbf{a})$, характеризующего согласование построенного приближения с исходными данными, при этом вид функционала во многом определяется распределением

шума измерения [4]. Конкретно в качестве $F(\mathbf{a})$ примем функционал

$$F(\mathbf{a}) = \left| \sum_{i=1}^n \omega_i (\tilde{f}_i - S_N(x_i, \mathbf{a}))^2 \right|, \quad (3)$$

часто используемый при обработке экспериментальных данных [2]. Весовые множители $\omega_i > 0$ характеризуют значимость i -го измерения.

Относительно вектора шума измерения $\xi = |\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n|^T$ будем предполагать, что он имеет нулевое среднее и корреляционная матрица V_ξ диагональна, т. е. $V_\xi = \text{diag} \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2 \}$, где σ_i^2 — дисперсия шума измерения. В этом случае весовые множители ω_i можно положить $\omega_i = \text{const}/\sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Введем матрицу Φ размером $n \times N$ вида

$$\Phi = | \Phi_1 : \Phi_2 : \dots : \Phi_n |.$$

Здесь j -й столбец Φ_j определяется как

$$\Phi_j = | \varphi_j(x_1), \varphi_j(x_2), \dots, \varphi_j(x_n) |^T.$$

Тогда (3) можно представить в виде

$$F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \Phi^T \mathbf{W} \Phi \mathbf{a} - 2 \mathbf{a}^T \Phi^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{f}}^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{f}},$$

где $\mathbf{W} = \text{diag} \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$; $\tilde{\mathbf{f}} = | \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n |^T$ — вектор измерений. Вектор \mathbf{a}^* , доставляющий минимум $F(\mathbf{a})$, находится из системы нормальных уравнений

$$\Phi^T \mathbf{W} \Phi \mathbf{a} = \Phi^T \mathbf{W} \tilde{\mathbf{f}},$$

состоящей из N уравнений. Если решение \mathbf{a}^* существует и оно единственно (это доказывается для конкретного базиса $\{ \varphi_j(x) \}$), то для любого вектора $\tilde{\mathbf{f}}$ однозначно определяется приближение $S_N(x, \mathbf{a})$ в пространстве \mathcal{P}_N .

В дальнейшем потребуются следующие алгебраические конструкции:

вектор $\mathbf{s}(N) = | s_1(N), s_2(N), \dots, s_n(N) |^T$ с проекциями $s_i(N) = S_N(x_i, \mathbf{a})$;

вектор невязки $\mathbf{e}(N) = | e_1(N), \dots, e_n(N) |^T$ с проекциями $e_i(N) = \tilde{f}_i - s_i(N)$;

оператор невязки $\mathbf{E}(N)$, осуществляющий преобразование $\tilde{\mathbf{f}} \rightarrow \mathbf{e}(N)$, т. е. $\mathbf{e}(N) = \mathbf{E}(N) \tilde{\mathbf{f}}$, и определяемый соотношением $\mathbf{E}(N) = \mathbf{I} - \Phi (\Phi^T \mathbf{W} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{W}$. Можно показать, что $\mathbf{E}(N)$ есть оператор проектирования на пространство, ортогональное векторам $\mathbf{s}(N)$, и след этого оператора равен $n - N$.

Алгоритмы оценивания оптимальной размерности. Рассмотрим одно условие (назовем его сходимостью в узлах), которому, на наш взгляд, должны удовлетворять алгоритмы выбора размерности.

Если уровень шума измерения равномерно уменьшается (т. е. $|\xi_i| \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, n$), то значения $S_N(x_i, \mathbf{a})$ должны приближаться к $f(x_i)$, и в пределе, когда шум равен нулю, $S_N(x_i, \mathbf{a}) = f(x_i)$. Следовательно, условие сходимости в узлах имеет вид

$$\lim |f(x_i) - S_N(x_i, \mathbf{a})| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{при} \quad \text{Sp}[V_\xi] \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $\text{Sp}[V_\xi]$ — след корреляционной матрицы V_ξ . Ошибку приближения $e_i(N) = f(x_i) - S_N(x_i, \mathbf{a})$ в узле x_i можно выразить соотношением $e_i(N) = -\xi_i + e_i(N)$, из которого следует, что (4) будет иметь место, если

$$\lim |e_i(N)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{при} \quad \text{Sp}[V_\xi] \rightarrow 0. \quad (5)$$

Таким образом, алгоритмы выбора размерности должны удовлетворять условию покоординатной сходимости вектора невязки к нулю.

Перейдем к изложению алгоритмов. При этом будут приводиться только основные утверждения и конечные выражения с соответствующими

щими ссылками на литературу. Для удобства изложения алгоритмы будут обозначаться латинскими буквами.

Алгоритм V (выбор размерности по принципу невязки). Предполагается, что корреляционная матрица V_{ξ} задана. Алгоритм основан на утверждении, которое для приближения (2) можно сформулировать следующим образом [2]:

Если $S_N(x, a)$ хорошо приближает $f(x)$ в узлах $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ (модель $S_N(x, a)$ для $f(x)$ является полной), то распределение квадратичной формы $R_V(N) = e^T(N) V_{\xi}^{-1} e(N)$ подчиняется χ^2 -распределению с $n - N$ степенями свободы.

Таким образом, выбор размерности сводится к проверке гипотезы

$$H_0: R_V(N) \sim \chi_{n-N}^2, \quad (6)$$

для чего можно использовать следующий простейший критерий, а именно: гипотеза (6) принимается с вероятностью ошибки первого рода, равной β , если

$$R_V(N) \in \Theta_{n-N}(\beta), \quad (7)$$

где $\Theta_{n-N}(\beta) = [\theta_{n-N}(\beta/2), \theta_{n-N}(1 - \beta/2)]$ — интервал, граничные точки которого определяются квантилями χ_{n-N}^2 -распределения уровней $\beta/2, 1 - \beta/2$ соответственно. Следовательно, в качестве размерности принимается наименьшее значение N (обозначаемое как N_V), удовлетворяющее (7). Доказательство сходимости в узлах проведем для случая $V_{\xi} = \text{diag} \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2 \}$. Так как N_V удовлетворяет (7), то при любых σ_i^2 справедливо

$$\sum_{i=1}^n e_i^2(N_V) / \sigma_i^2 \leq c_V (n - N_V),$$

где $c_V > 1$. Тогда $|e_i(N_V)| \rightarrow 0$ при $\sigma_i^2 \rightarrow 0$ и выполняется условие (5), из которого следует сходимость в узлах (4).

Алгоритм W (выбор размерности из критерия оптимальности приближения экспериментальных данных). Предполагается, что корреляционная матрица V_{ξ} задана. Алгоритм основан на следующем утверждении [5, 6].

Если матрица вторых моментов $V_e(N) = M[e(N)e^T(N)]$ вектора невязки удовлетворяет при некотором значении N матричному равенству

$$V_e(N) = V_{\xi} E^T(N), \quad (8)$$

то это значение является оптимальной размерностью.

При практическом использовании (8) возникает трудность, связанная с оценением $V_e(N)$ по одной реализации случайного вектора $e(N)$. Поэтому (вместо проверки точного равенства (8)) проверяется гипотеза $H_0: V_e(N) = V_{\xi} E^T(N)$. Для этого вводится квадратичная форма

$$R_W(N) = e^T(N) (V_{\xi} E^T(N))^{-1} e(N) = \tilde{f}^T V_{\xi}^{-1} e(N)$$

от $n - N$ независимых случайных величин. Если принимается гипотеза H_0 , то $M[R_W(N)] = n - N$ и распределение величины $R_W(N)$ можно аппроксимировать χ_{n-N}^2 -распределением. Поэтому в качестве оценки для N_{opt} принимается наименьшее значение N (обозначаемое как N_W), для которого

$$R_W(N) \in \Theta_{n-N}(\beta), \quad (9)$$

что соответствует принятию гипотезы H_0 с вероятностью ошибки первого рода, равной β . Из неравенства

$$R_W(N_W) = \sum_{i=1}^n e_i(N_W) \tilde{f}_i / \sigma_i^2 \leq c_V (n - N_W), \quad c_V > 1,$$

справедливого для любых σ_i^2 , следует сходимость $|e_i(N_W)| \rightarrow 0$ при $\sigma_i^2 \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots, n$, и сходимость в узлах (4).

Алгоритм C (выбор размерности на основе C -статистики [7]). Предполагается, что $V_{\varepsilon} = \sigma^2 I$ (I — единичная матрица) и дисперсия σ^2 задана. Введем статистику

$$C(N) = RSS(N)/\sigma^2 + 2N - n,$$

где $RSS(N) = \sum_{i=1}^n e_i^2(N)$ — сумма квадратов проекций вектора невязки при заданной размерности N . Можно показать, что $C(N)$ является смещенной оценкой величины $\Delta^2(N)/\sigma^2$ [7]. В качестве оценки для N_{opt} принимается наибольшее значение N (обозначаемое как N_c), удовлетворяющее условию

$$C(N) \leq N. \quad (10)$$

Рассматриваемый алгоритм связан с алгоритмом V . Покажем это. Пусть гипотеза (6) принимается при $N = N_V$, причем $R_V(N_V) = RSS(N_V)/\sigma^2 \in [\Phi_{n-N}(\beta/2), n - N]$. Тогда N_V удовлетворяет условию (10) и может быть принята в качестве размерности, найденной по алгоритму C . Для алгоритма C сходимость в узлах доказывается аналогично сходимости алгоритма V .

Заметим, что все приведенные выше алгоритмы требуют задания дисперсий шума измерения. При неточном задании дисперсий полученные значения размерности пространства \mathcal{P}_N могут существенно отличаться от значений, вычисленных по точно заданным дисперсиям. Нельзя использовать распространенную (в методе наименьших квадратов) оценку $\hat{\sigma}^2 = RSS(N)/(n - N)$. В этом случае для любого N будут выполняться условия (7), (10).

Чувствительность алгоритмов V , W , C к точности задания дисперсий является их определенным недостатком. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть алгоритмы, не требующие задания корреляционной матрицы V_{ε} .

Алгоритм F (выбор размерности на основе F -статистики). Введем F -статистику [2, 3]

$$F(N) = (RSS(N-1) - RSS(N)) / (RSS(N)/(n - N)). \quad (11)$$

Если коэффициент a_N является незначимым в приближении (2), то F -статистика имеет центральное распределение Фишера $\mathcal{F}(1, n - N)$ со степенями свободы 1, $n - N$. Поэтому в качестве оценки для N_{opt} принимается наименьшее N (обозначаемое N_F), удовлетворяющее условиям

$$F(N) > F_{\beta}(1, n - N); \quad F(N+1) \leq F_{\beta}(1, n - N - 1),$$

где $F_{\beta}(1, n - N)$ — квантиль уровня β распределения $\mathcal{F}(1, n - N)$ ($\beta = 0,9 \div 0,95$).

Алгоритм U (выбор размерности на основе метода перекрестной значимости [8]). Обозначим через $S_N^{[k]}(x, a)$ приближение (2), построенное по исходным данным (1) с удаленным значением f_k . Введем функционал [8]

$$U(N) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\tilde{f}_k - S_N^{[k]}(x_k, a))^2,$$

определяющий среднеквадратическую ошибку предсказания значений f_k , $k = 1, 2, \dots, n$, удаленных при построении приближения $S_N^{[k]}(x, a)$. Для (2) функционал $U(N)$ можно записать в виде [8]

$$U(N) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2(N) / \left[1 - \frac{N}{n} \right]^2. \quad (12)$$

Для достаточно больших n и $V_{\varepsilon} = \sigma^2 I$ справедливо соотношение $U(N) \approx \Delta^2(N) + \sigma^2$. Так как второе слагаемое не зависит от N , то в качестве

оценки оптимальной размерности выбирается значение N (обозначаемое N_U), доставляющее минимум (12).

Алгоритм А (выбор размерности на основе информационного критерия [9]). Предполагается, что вектор шума ξ распределен нормально и имеет корреляционную матрицу $V_\xi = \sigma^2 I$. Введем функционал

$$A(N) = n \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2(N) \right) + 2N. \quad (13)$$

В качестве оценки для $N_{\text{опт}}$ принимается значение N (обозначаемое N_A), доставляющее минимум этому функционалу.

Существует связь между алгоритмами U и A [9]. Из соотношения

$$(A(N) - 2N)/n = \ln \left(\sum_{i=1}^n e_i^2(N)/n \right)$$

имеем

$$\exp(A(N)/n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2(N) / \exp\left(-\frac{2N}{n}\right).$$

При значениях $N/n \ll 1$ справедливо тождество

$$\exp(A(N)/n) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2(N) \left[1 - \frac{N}{n} \right]^2 = U(N),$$

из которого следует эквивалентность (при $N/n \ll 1$) алгоритмов U и A .

Алгоритм R (выбор размерности на основе метода упорядоченной минимизации эмпирического риска [4]). В качестве оценки для $N_{\text{опт}}$ принимается значение N (обозначаемое N_R), доставляющее минимум функционалу

$$R(N) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2(N) \left[1 - \left(\frac{N \ln \left(\frac{n}{N} + 1 \right) - \ln \eta}{n} \right)^{1/2} \right]_\infty, \quad (14)$$

где $[z]_\infty = \begin{cases} z, & z \geq 0; \\ \infty, & z < 0, \end{cases}$ а величина η выбирается из интервала $[0,01; 0,03]$.

Отметим характерную особенность трех последних алгоритмов. Функционалы, из минимума которых определяется размерность, включают две составляющие. Первая (вида $\sum_{i=1}^n e_i^2(N)/n$) уменьшается с ростом N , а вторая составляющая (слагаемое $2N$ или второй множитель в (13), (14) возрастает с увеличением N и отражает «сложность» построенного приближения. Нахождение некоторого компромисса между значениями этих составляющих положено в основу трех последних алгоритмов выбора размерности пространства \mathcal{P}_N .

Результаты вычислительного эксперимента. Представляется целесообразным сравнить изложенные алгоритмы по точности оценивания оптимальной размерности при различных отношениях $N_{\text{опт}}/n$ и различных уровнях шума измерения. Для этого был проделан следующий вычислительный эксперимент.

В качестве $f(x)$ бралась гладкая функция с непрерывной первой производной, задаваемая либо линейной комбинацией гауссианов

$$f(x) = \sum_{l=1}^3 d_l \exp(-(x - x_l)^2/b_l),$$

либо выражением

$$f(x) = 0,75 \exp(-100(2x - 1)^2) + 0,25(1 - (2x - 1)^2).$$

Для последней $f(x)$ характерно наличие участков с большими и малыми значениями первой производной. Значения функции $f(x)$ в узлах x_i ,

$i = 1, 2, \dots, n$, искажались нормально распределенными числами с корреляционной матрицей $V_\varepsilon = \sigma^2 I$. В качестве пространства \mathcal{P}_N было взято пространство B -сплайнов $P_{m, z, v}$ [10], и приближение $S_N(x, a)$ имело вид

$$S_N(x, a) = \sum_{j=1}^N a_j B_{m,j}(x),$$

где $B_{m,j}(x)$ — B -сплайн m -й степени ($m = 3$). Количество узлов n задавалось равным $n = 30, n = 200$.

Методом статистического моделирования определялись оптимальная размерность $N_{\text{опт}}$ и ошибка $\Delta^2(N_{\text{опт}})$. Для каждого алгоритма выбора размерности вычислялись следующие характеристики:

выборочная среднеквадратическая ошибка приближения

$$\hat{\Delta}^2(N) = \frac{1}{nM} \sum_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^n (f(x_i) - S_N^{(j)}(x_i, a))^2 \right),$$

где $S_N^{(j)}(x_i, a)$ — приближение, построенное по j -й реализации случайного вектора f (объем выборки $M = 100$);
среднее значение размерности

$$\bar{N} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M N^{(j)},$$

где $N^{(j)}$ — значение размерности, вычисленное по j -й реализации f .

Анализ результатов вычислительного эксперимента позволяет сделать следующие выводы:

1. При известных дисперсиях шума измерения целесообразно использовать алгоритм W , достаточно точно оценивающий $N_{\text{опт}}$. Алгоритмы V, C , как правило, дают заниженную размерность, что соответствует «заглаженному» приближению.

2. Если дисперсии шума не заданы, то при малых значениях $N_{\text{опт}}/n < 0,2$ рекомендуется использовать алгоритм U , а при больших значениях $N_{\text{опт}}/n$ — алгоритм R .

3. В случае коррелированного шума измерения (коэффициент корреляции в соседних узлах задавался равным 0,2) алгоритм U приводит к завышенным значениям размерности и недостаточному сглаживанию шума измерения. Алгоритм R и при коррелированном шуме позволяет достаточно надежно оценить оптимальную размерность. При известных дисперсиях коррелированного шума целесообразно применение алгоритма W , легко обобщаемого на случай недиагональной корреляционной матрицы.

В заключение заметим, что изложенные алгоритмы могут быть также использованы при построении решения некорректно поставленных задач в конечномерном базисе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
2. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980.
3. Кампскас В. А. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям. — Вильнюс: Моклас, 1982.
4. Вашик В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979.
5. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. — Новосибирск: Наука, 1984.
6. Воскобойников Ю. Е. Критерий и алгоритмы выбора параметра при сглаживании сплайн-функциями. — В кн.: Алгоритмы обработки и средства автоматизации теплофизического эксперимента. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1978.
7. Mallows C. L. Some comments on C_p . — Technometrics, 1973, v. 15, N 4, p. 661—672.
8. Golub G. H., Heath M., Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. — Technometrics, 1979, v. 21, N 2, p. 421—428.

9. Akaike H. Information theory and extension of maximum likelihood principle.— In: Proc. 2nd Symp. Inf. Theory. Budapest: Akademia Kiado, 1973, p. 267—281.
10. Воскобойников Ю. Е. Построение дескриптивных приближений для сглаживания и дифференцирования экспериментальных данных.— Автометрия, 1983, № 3, с. 3—9.

Поступила в редакцию
13 июля 1984 г.

УДК 681.2.08

В. В. БРОСТЮК, М. И. КИСЕЛЕВ

(Москва)

УСТРАНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ В РЕЖИМЕ ДИСКРЕТНЫХ ОТСЧЕТОВ

Достижение все большей точности в измерениях, необходимых для проведения экспериментальных исследований, связано с преодолением трудностей, которые вызываются возрастанием уровня динамических (инерционных и диссипативных) искажений измеряемого воздействия. Эти искажения возникают за счет неидеальности аппаратной функции измерительного прибора и имеют место даже в том случае, когда на аппаратную функцию не накладываются какие-либо ограничения с целью фильтрации внешней помехи.

В сложившейся ситуации истинная информация о поле измеряемой физической величины может быть получена из решения обратной задачи теории измерений. Такая возможность детально проанализирована в [1] для линейного приближения и в [2] для общего случая с учетом нелинейности измерительных приборов. Существенными для данного подхода являются необходимость точного знания аппаратной функции прибора и сложная математическая обработка результатов измерений, требующая больших затрат времени и применения высокопроизводительных вычислительных машин. Однако в большинстве случаев аппаратная функция известна лишь приближенно [3], а строгость результатов, получаемых при решении некорректно поставленных обратных задач, во многом зависит от наличия априорной информации [4].

В настоящей работе предлагается иной подход, который может оказаться эффективным для ряда важных частных задач. При этом динамические искажения исключаются не последующей математической обработкой, а специальной организацией процедуры измерений при наличии адиабатических инвариантов в измерительной системе [5, 6].

В качестве исходной модели первичного преобразователя возьмем осциллятор с затуханием:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — наблюдаемая величина, характеризующая отклонение осциллятора от положения равновесия; ε — коэффициент затухания; ω_0 — собственная циклическая частота осциллятора; $f(t)$ — внешнее воздействие.

Следует отметить, что в данную модель линейного осциллятора заложена простейшая схема диссипативного процесса: сила трения пропорциональна скорости.

Общее решение уравнения (1) хорошо известно:

$$x(t) = e^{-\varepsilon t} (x_0 \cos \Omega_0 t + \dot{x}_0 \sin \Omega_0 t) + \frac{1}{\Omega_0} \int_0^t f(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \Omega_0 (t - \tau) d\tau. \quad (2)$$