ЛИТЕРАТУРА

1. **Макушкин Ю. С., Мицель А. А., Хмельницкий Г. С.** Лазерная абсорбционная диагностика атмосферных газов.— ЖПС, 1981, т. 35, вып. 5, с. 785—790.
2. **Воскобойников Ю. Е., Мицель А. А.** Построение устойчивого решения плохообусловленной системы алгебраических уравнений при случайных погрешностях в исходных данных.— Автометрия, 1982, № 2, с. 67—72.
3. **Фукунага К.** Введение в статистическую теорию распознавания образов.— М.: Наука, 1979.
4. **Применение** ЭВМ в химических и биохимических исследованиях/Под ред. А. Ф. Васильева.— М.: Химия, 1976, т. 1, с. 247—292.
5. **Арефьев В. Н., Дианов-Клоков В. И., Иванов В. М., Сизов Н. Н.** Континуальное поглощение излучения 8—13 мкм водяным паром.— М., 1979. (Препринт АН СССР, ИФА).
6. **Kneizys F. X. et al.** Atmospheric Transmittance Radiance: Computer Code Lowtran 5.— AFCRL-TR-80-0067, 1980.

Поступила в редакцию
4 апреля 1984 г.

УДК 62-50

Ю. И. ПАЛАГИН

(Ленинград)

НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

При вероятностных исследованиях сложных информационно-измерительных и управляемых систем, оценке эффективности алгоритмов обработки статистических данных возникают задачи статистического моделирования случайных процессов и полей. Для отдельных классов случайных процессов известны простые и эффективные моделирующие алгоритмы, которые позволяют адекватно воспроизводить на ЭВМ заданные спектральные или корреляционные характеристики [1, 2]. В более сложных случаях, например при моделировании многомерных случайных полей, трудности моделирования и затрачиваемое машинное время резко возрастают. Важное значение имеет проблема разработки экономичных в вычислительном отношении математических моделей случайных процессов и полей и синтеза соответствующих моделирующих алгоритмов.

Алгоритмически простой метод моделирования стационарных случайных процессов дают параметрические (неканонические) представления [3—5]. В работах [6, 7] параметрические представления были обобщены на случай скалярных, а в [8, 9] — векторных случайных полей. Все известные модели параметрических представлений имеют идентичную структуру. Они основаны на тригонометрических гармониках (временной — для процессов — и пространственной — для полей), имеющих случайную частоту с выбранным априорно законом распределения.

Настоящая статья посвящена синтезу негармонических моделей параметрических представлений случайных процессов и полей.

Постановка задачи. Общая форма параметрических представлений. Рассмотрим задачу статистического моделирования гауссового случайного процесса или поля в следующей постановке. Пусть заданы математическое ожидание (МО) $M\xi(x)$ и матричная корреляционная функция (МКФ)

$$R_\xi(x+y,\ y) = M\overset{\circ}{\xi}(x+y)\overset{\circ}{\xi}^{\tau}(y) = \| M\overset{\circ}{\xi}_k(x+y)\,\overset{\circ}{\xi}_l(y) \| \quad (1)$$

n-мерного случайного поля $\xi(x)=(\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x))^{\mathrm{T}}$. Здесь $x=(x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$; $y=(y_1, \ldots, y_m)^{\mathrm{T}}$ — m-мерные векторы; т — символ транспонирования; $\mathring{\xi}(x)=\xi(x)-M\xi(x)$ — центрированное случайное поле. Требуется получить реализации случайного поля с заданной МКФ (1). Без ограничения общности можно считать МО нулевым, что и предполагается в дальнейшем. Для процессов необходимо заменить векторы x, y на скалярные временные аргументы.

Введем векторное случайное поле (СП)

$$\eta_N(x)=\left(\eta_1^{(N)}(x), \ldots, \eta_n^{(N)}(x)\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\mathfrak{z}(x, \Omega_j), \tag{2}$$

где $\mathfrak{z}(x, \Omega_j)=(\mathfrak{z}_1(x, \Omega_j), \ldots, \mathfrak{z}_n(x, \Omega_j))^{\mathrm{T}}$ — векторное СП, зависящее от аргумента $x\in R^m$ и конечномерного случайного параметра Ω_j. Векторы Ω_j, $j=1, \ldots, N$, статистически независимы и одинаково распределены. Потребуем, чтобы СП $\mathfrak{z}(x, \Omega_j)$ обладало следующими свойствами:

$$M\mathfrak{z}(x, \Omega_j)=0;\ M\mathfrak{z}(x+y, \Omega_j)\mathfrak{z}^{\mathrm{T}}(y, \Omega_j)=R_\xi(x+y, y). \tag{3}$$

Тогда в силу условий (3) первые два момента гауссового СП $\xi(x)$ и поля $\eta_N(x)$ равны при любом N, а все конечномерные распределения $\eta_N(x)$ при $N\to\infty$ асимптотически нормальны. Поэтому поле $\eta_N(x)$ при достаточно больших N может быть использовано для моделирования гауссовых СП и процессов. Поля $\mathfrak{z}(x, \Omega_j)$ моделируются как независимые реализации СП $\mathfrak{z}(x, \Omega)$ со свойствами (3).

Получим негармонические модели параметрического представления $\mathfrak{z}(x, \Omega)$. Примем, что моделируемое поле может быть представлено в виде

$$\xi(x)=\int_{R^k}\Phi(x, u)\,\varepsilon(u)\,1_x(u)\,du. \tag{4}$$

Здесь $u\in R^k$; $\varepsilon(u)=(\varepsilon_1(u), \ldots, \varepsilon_l(u))^{\mathrm{T}}$ — l-мерное векторное δ-коррелированное случайное поле (белый шум) с нулевым средним и МКФ $M\varepsilon(u_1)\varepsilon^{\mathrm{T}}(u_2)=I_l\delta(u_1-u_2)$; I_l — единичная матрица порядка l; $\delta(u)=\prod_{i=1}^{k}\delta_i(u_i)$ — k-мерная δ-функция; $\delta_i(u_i)$ — одномерные δ-функции; $\Phi(x, u)$ — заданная прямоугольная матричная функция размером $n\times l$ (n — число строк, l — столбцов); $1_x(u)$ — единичная функция, равная

$$1_x(u)=\begin{cases}1, & \text{если } u\in D_x;\\ 0, & \text{если } u\notin D_x;\end{cases}$$

D_x — множества в R^k, зависящие от переменной x. Введение функции $1_x(u)$ учитывает возможность конечных пределов интегрирования в (4) по области D_x. Математическое ожидание поля (4) равно нулю, а МКФ определяется интегралом

$$R_\xi(x+y, y)=\int_{R^k}\Phi(x+y, u)\,\Phi^{\mathrm{T}}(y, u)\,1_{x+y}(u)\,1_y(u)\,du. \tag{5}$$

Будем искать соответствующее параметрическое представление в виде

$$\mathfrak{z}(x, \Omega)=A(x, v)\,z, \tag{6}$$

где $A(x, v)$ — некоторая искомая матрица размером $n\times l$; z — l-мерный случайный вектор с нулевым средним и единичной корреляционной матрицей; v — k-мерный случайный вектор с плотностью распределения $\psi(v)$. Случайный параметр $\Omega=(z, v)$, его компоненты v и z независимы между собой. Очевидно, $M\mathfrak{z}(x, \Omega)=0$, а для МКФ справедливо представление

$$R_{\mathfrak{z}}(x+y, y)=\int_{R^k}A(x+y, v)\,A^{\mathrm{T}}(y, v)\,\psi(v)\,dv. \tag{7}$$

Из сравнения (5) и (7) следует, что МКФ $\xi(x)$ и $\mathfrak{z}(x, \Omega)$ равны, если выполнено равенство

$$A(x, v) = \Phi(x, v)\, 1_x(v)/\sqrt{\psi(v)}. \tag{8}$$

Из (2), (6), (8) следует общая форма параметрического представления

$$\eta_N(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \Phi(x, v_j)\, 1_x(v_j)\, \psi^{-1/2}(v_j)\, z_j. \tag{9}$$

Распределение z_j определяется лишь первыми двумя моментами. Плотность распределения $\psi(v)$ вектора v — произвольная положительная функция. Функция $\psi(v)$ может быть выбрана типовой, дающей наиболее простые моделирующие алгоритмы, например нормальной. Модель (9) так же, как и аналогичное гармоническое представление работы [5], содержит множитель $\psi^{-1/2}(v_j)$.

Рассмотрим моделирование отдельных классов случайных процессов и полей и соответствующие примеры.

Однородные случайные поля. Однородные векторные случайные поля с матричной спектральной плотностью $S_\xi(u) = \|S_{kl}(u)\|$, $k, l = 1, \ldots, n$, $u \in R^m$, имеют представление

$$\xi(x) = \int_{R^m} \Phi(x - y)\, \varepsilon(y)\, dy$$

вида (4). Для отыскания матричной весовой функции $\Phi(z)$ размером $n \times l$ матрица $S_\xi(u)$ вначале факторизуется:

$$S_\xi(u) = G(u) S_\eta(u) G^*(u).$$

Здесь $G^*(u)$ — матрица, сопряженная по Эрмиту с $G(u)$; $S_\eta(u) = I_l(2\pi)^{-m} = \mathrm{const}$ — спектральная плотность $\varepsilon(y)$. Алгоритмы факторизации приведены в [8]. Затем находится преобразование Фурье:

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R^m} G(u)\, e^{iu^{\mathrm{T}}z} du. \tag{10}$$

Соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$\eta_N(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \Phi(x - v_j)\, z_j \psi^{-1/2}(v_j). \tag{11}$$

Формула (11) означает, что в качестве базисных функций при построении имитационной модели случайного поля берутся значения весовой функции формирующего фильтра $\Phi(x - y)$ в случайно выбранных точках $y = v_j$.

Найдем параметрическое представление для скалярного однородного двумерного СП с корреляционной функцией

$$R_\xi(x) = \sigma_\xi^2 e^{-1/2\left[\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2\right]}. \tag{12}$$

Здесь $m = 2$; $x = (x_1, x_2)$; α_1, α_2 — параметры, имеющие смысл интервалов корреляции вдоль осей OX, OY соответственно. Модель (12) используется для описания статистических свойств некоторых типов фонов в оптико-электронных приборах [10]. Спектральная плотность поля (12) равна

$$S_\xi(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} e^{-iu^{\mathrm{T}}x} R_\xi(x)\, dx = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\, \alpha_1 \alpha_2 e^{-1/2[(u_1\alpha_1)^2 + (u_2\alpha_2)^2]}.$$

Функция $G(u)$ имеет вид

$$G(u) = \sqrt{(2\pi)^2 S_\xi(u)} = \sigma_\xi \sqrt{2\pi\alpha_1\alpha_2}\, e^{-\frac{1}{4}[(u_1\alpha_1)^2 + (u_2\alpha_2)^2]}.$$

Ее преобразование Фурье (10) равно

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{2}\,\sigma_\xi}{\sqrt{\pi\alpha_1\alpha_2}}\, e^{-\left[\left(\frac{z_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\alpha_2}\right)^2\right]}.$$

Здесь при вычислениях преобразований Фурье нами использовалась формула [11, с. 228]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\, dx = \alpha\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2 u^2}{2}}.$$

Отсюда получаем параметрическое представление

$$\eta_N(x) = \sigma_\xi \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_1\alpha_2 N}} \sum_{j=1}^{N} z_j \psi^{-1/2}(v_j)\, e^{-\left(\frac{x_1 - v_1}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - v_2}{\alpha_2}\right)^2}, \tag{13}$$

базисными функциями которого являются гауссоиды с центром в случайной точке плоскости. Случайный параметр равен $\Omega = (z, v)$, где z — скалярная случайная величина, $Mz = 0$, $Mz^2 = 1$; $v = (v_1, v_2)$ — двумерный случайный вектор с плотностью распределения $\psi(v)$.

При цифровой реализации затрачиваемое машинное время ЦВМ пропорционально N. Величину N и законы распределения случайных параметров модели (13) найдем из условия достижения заданной точности моделирования. Примем $Mz^3 = 0$, тогда коэффициент ассимметрии поля $\eta_N(x)$ равен нулю. Погрешность моделирования одномерного распределения характеризуется коэффициентом эксцесса:

$$\gamma_2[\eta_N(x)] = \frac{M\eta_N^4(x) - 3}{\sigma_\xi^4} = \frac{Mz^4 M\mathfrak{z}^4(x, \Omega) - 3}{N}; \tag{14}$$

$$\mathfrak{z}(x, \Omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_1\alpha_2}}\, \psi^{-1/2}(v) \exp\left\{-\left(\frac{x_1 - v_1}{\alpha_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2 - v_2}{\alpha_2}\right)^2\right\}.$$

Наименьшее значение $\gamma_2[\eta_N(x)]$ достигается при $Mz^4 = 1$. Требуемые значения первых четырех моментов ($Mz = Mz^3 = 0$, $Mz^2 = Mz^4 = 1$) имеет, например, случайная величина z, принимающая равновероятно значения ± 1. Положим, что v_1, v_2 нормально распределены ($Mv_i = m_i$; $\sigma^2[v_i] = \sigma_i^2$) и независимы. Тогда четвертый момент поля $\mathfrak{z}(x, \Omega)$ определится формулой

$$M\mathfrak{z}^4(x, \Omega) = \frac{16\sigma_1^2\sigma_2^2}{\left[(8\bar{\sigma}_1^2 - 1)(8\bar{\sigma}_2^2 - 1)\right]^{1/2}} \exp\left(\frac{4y_1^2}{8\bar{\sigma}_1^2 - 1} + \frac{4y_2^2}{8\bar{\sigma}_2^2 - 1}\right), \tag{15}$$

где $\bar{\sigma}_i^2 = \sigma_i^2/\alpha_i^2 > 1/8$; $y_i = (x_i - m_i)/\alpha_i$. Пусть поле моделируется на прямоугольнике $x \in \Delta = [0, T_1] \times [0, T_2]$; $\bar{T}_i = T_i/\alpha_i$ — длина стороны в интервалах корреляции. Параметры m_i, σ_i^2 выбираются из условия минимума величины $\max\limits_{x \in \Delta} M\mathfrak{z}^4(x, \Omega)$, они равны $m_i = (\bar{T}_i/2)\alpha_i$, $\sigma_i^2 = \frac{\alpha_i^2}{8}(\bar{T}_i^2 + 3/2)$. Отсюда из формул (14), (15) следует выражение

$$\gamma_2[\eta_N(x)] = (\varphi(\bar{T}_1)\varphi(\bar{T}_2) - 3)/N.$$

Здесь функция $\varphi(T)$ имеет вид

$$\varphi(T) = \frac{T^2 + 1{,}5}{2\sqrt{T^2 + 0{,}5}} \exp\left(\frac{T^2}{T^2 + 0{,}5}\right).$$

Из неравенства

$$|\gamma_2[\eta_N(x)]| \leqslant \gamma_*,$$

где γ_* — заданное допустимое значение коэффициента эксцесса, находим

$$N > N_* = |\varphi(\bar{T}_1)\varphi(\bar{T}_2) - 3|/\gamma_*.$$

При $\gamma_* = 0{,}4$, $\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = 5$ имеем $N_* = 120$. Для получения 5 тыс. значений поля на ЦВМ ЕС-1030 (среднее быстродействие 100 тыс. опер. в с) необходимо 12 мин машинного времени. Аналогичные гармонические представления полей [8] требуют приблизительно тех же затрат времени ЦВМ.

Модели (11), (13) допускают аналоговую реализацию оптическими методами. Яркостное случайное поле (11) создается в фокальной плоскости оптической системы с весовой функцией $\Phi(z)$. На вход оптической системы подается излучение от N точечных излучателей, расположенных в случайных точках с координатами v_j. Мощности каждого излучателя случайны и пропорциональны величине $z_j/\sqrt{N\psi(v_j)}$. В отличие от известных методов получения изображений случайных полей [12] здесь не требуется моделирование двумерного СП типа белого шума.

Случайные процессы в линейных системах. Процессы в линейной нестационарной системе n-го порядка

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\delta(t), \quad t \in [0,\ T], \tag{16}$$

на вход которой подается скалярное возмущение $\delta(t)$ типа белого шума, приводятся к виду

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau)\, B(\tau)\, \varepsilon(\tau)\, d\tau, \tag{17}$$

где $\Phi(t, \tau)$ — матричная импульсная переходная функция размером $n \times n$. Если ввести функцию

$$1_t(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0, t]; \\ \theta, & \tau \notin [0, t], \end{cases}$$

то процесс (16), (17) является частным случаем представления (4). Параметрическое представление имеет вид

$$\mathfrak{z}(t, \Omega) = \begin{cases} \Phi(t, v)\, B(v)\, z\psi^{-1/2}(v), & t \geqslant v; \\ 0, & t < v, \end{cases}$$

т. е. в качестве базисных функций принимается реакция системы (16) на δ-импульс, поданный в случайный момент времени $t = v$. Для стационарных систем с матрицами $A(t) = A$, $B(t) = B$, $\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$ получаем следующее представление:

$$\eta_N(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1_t(v_j)}{\sqrt{\psi(v_j)}}\, e^{A(t-v_j)} B z_j. \tag{18}$$

Здесь e^{At} — матричный экспоненциал. В частности, для стационарного случайного процесса с корреляционной функцией $R_\xi^{(1)}(\tau) = \sigma_\xi^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ имеем [2] $A = -\alpha$, $B = \sigma_\xi\sqrt{2\alpha}$. Из (18) следует представление

$$\eta_N(t) = \sigma_\xi \sqrt{\frac{2\alpha}{N}} \sum_{j=1}^{N} 1_t(v_j)\, e^{-\alpha(t-v_j)} z_j \psi^{-1/2}(v_j),$$

базисными функциями которого являются экспоненты. Стационарные процессы с распространенными на практике типовыми корреляционными функциями

$$R_\xi^{(2)}(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos\beta\tau;$$

$$R_\xi^{(3)}(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$$

приводятся к параметрически адекватной форме

$$\eta_N(t) = \sigma_\xi \sqrt{\frac{2\alpha}{N}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1_t(v_j)\, z_j}{\sqrt{\psi(v_j)}}\, e^{-\alpha(t-v_j)} \Big\{\cos\beta(t - v_j) +$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta(t-v_j)\Big\}; \qquad (19)$$

$$\eta_N(t)=\frac{2\sigma_\xi}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{N}}\sum_{j=1}^{N}\frac{1_t(v_j)\,z_j}{\sqrt{\psi(v_j)}}e^{-\alpha(t-v_j)}\sin\beta(t-v_j). \qquad (20)$$

При выводе соотношений (19), (20) процессы приводились к компоненте марковского случайного процесса (16), $n=2$. Для определения матриц A и B использовались формулы из работы [13].

Заключение. При решении задач вероятностного исследования сложных стохастических систем важное значение имеет проблема разработки простых и удобных в реализации моделей случайных процессов и полей. Предложенные модели параметрических представлений пригодны для воспроизведения на ЭВМ широкого класса СП. К рассмотренному классу относятся скалярные и векторные, однородные и неоднородные случайные поля, стационарные и нестационарные случайные процессы.

Наличие исходной случайности в виде конечномерного случайного вектора Ω с типовыми законами распределения облегчает синтез моделирующих алгоритмов. Предложенные модели в отличие от известных в качестве базисных функций содержат негармонические составляющие, что дает возможность в ряде случаев использовать более простые физические способы имитации. Модели адекватны моделируемому полю или процессу на уровне первых двух моментов (математического ожидания, авто- и взаимных корреляционных функций). После усреднения достаточного числа реализаций может быть достигнута приближенная нормальность конечномерных распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Полляк Ю. Г.** Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах.— М.: Сов. радио, 1971.
2. **Быков В. В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1971.
3. **Чернецкий В. И.** Анализ точности нелинейных систем управления.— М.: Машиностроение, 1968.
4. **Расщепляев Ю. С., Фандиенко В. Н.** Синтез моделей случайных процессов для исследования автоматических систем управления.— М.: Энергия, 1981.
5. **Азизов А. М., Курицын А. Г.** К вопросу о представлениях случайных полей.— Автометрия, 1975, № 6.
6. **Малышев И. А., Палагин Ю. И.** Метод математического моделирования многомерных случайных полей.— В кн.: Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей: Труды X Всесоюз. симпозиума. Л.: ВНИИЭП, 1980.
7. **Михайлов Г. А.** Численное построение случайного поля с заданной спектральной плотностью.— ДАН СССР, 1978, т. 238, № 4.
8. **Палагин Ю. И.** Математическое моделирование векторных случайных полей и процессов.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 2.
9. **Палагин Ю. И.** Синтез параметрических представлений при математическом моделировании векторных случайных полей и процессов.— Автоматика и телемеханика, 1983, № 11.
10. **Левшин В. Л.** Обработка информации в оптических системах пеленгации.— М.: Машиностроение, 1978.
11. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятности.— М.: Наука, 1969.
12. **Шкурский Б. И.** Метод математического моделирования двумерных случайных полей.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 6.
13. **Свешников А. А.** Прикладные методы теории случайных функций.— М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию
19 октября 1984 г.