

Для получения этой формулы не использовался явный вид (4) ковариационной оценки β_0 , поэтому (12) справедливо для ковариационной оценки произвольного вида. Если рассматривается несмещенная оценка $\beta(\tau) = \beta_0(\tau)T/(T - |\tau|)$, то оптимальное корреляционное окно $1/(1 + \alpha a) = B^2/(B^2 + \text{var } \beta)$. Пусть τ_0 — интервал корреляции случайного процесса $x(t)$, тогда при $T \gg \tau_0$ из (12) следует, что $1/[1 + \alpha a(\tau)] = B^2/[B^2 + \text{var } \beta_0]$. Этот результат другим способом был получен Ломницким и Зарембой и приведен в [3]. Подстановка (12) в (11) дает минимальное значение уклонения

$$\epsilon_{\min}^2 = \sum_{\tau} B^2(\tau) \cdot [1 - (M\beta_0)^2 / ((M\beta_0)^2 + \text{var } \beta_0)]. \quad (13)$$

Отметим, что оптимальная в смысле минимума интегрального среднеквадратического уклонения (10) спектральная оценка для корреляционных окон (12) инвариантна на множестве несглаженных корреляционных оценок $\beta_k(\tau) = \beta_0(\tau) \sum_{i=0}^k (|\tau|/T)^i$, $k = 0, 1, \dots$ (или соответствующих несглаженных спектральных оценок f_k). Этим же свойством обладает минимальное уклонение (13) оптимальной оценки от спектральной плотности.

Для доказательства этого учтем, что формулы (12), (13) справедливы для корреляционных оценок произвольного вида. Подстановка β_k , $M\beta_k = (1 - |\tau|/T)B(\tau) \times \sum_{i=0}^k (|\tau|/T)^i$ и $\text{var } \beta_k = \left[\sum_{i=0}^k (|\tau|/T)^i \right]^2 \text{var } \beta_0$ в (13) и в соотношение для оптимальной оценки $\beta_0/(1 + \alpha a(\tau))$ вместо β_0 и соответствующих характеристик оценки β_0 приводит к одинаковым результатам независимо от $k = 0, 1, \dots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
2. Коляев К. В. Спектральный анализ случайных океанологических полей.— Л.: Гидрометеоздат, 1981.
3. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1971, вып. 1, 2.
4. Кулешов Е. Л. Метод компенсации смещения спектральной оценки.— В кн.: Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. Всесоюз. конф., Нальчик, 1—3 ноября 1982 г.— М.: МЭИ, 1982, ч. 1.
5. Parzen E. On consistent estimates spectrum of stationary time series.— The Annals of Math. Statistics, 1957, vol. 28, N 2, p. 329—348.

Поступило в редакцию 4 января 1984 г.

УДК 621.45 : 621.438

Б. М. КОНОХОВ, И. К. ЛИПЕЙКЕНЕ, В. Т. ШЕПЕЛЬ
(Андронов Ярославской)

ОЦЕНКА МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Большинство современных механических систем оказываются слишком сложными для того, чтобы создать достаточно подробную их математическую модель путем идеализации и постулирования общих закономерностей. Однако хотя неполное понимание физического механизма процессов, происходящих в отмеченных системах, не позволяет построить математическую модель, надлежащим образом записанные экспериментальные данные полностью содержат в себе недостающую информацию, относящуюся к наблюдаемой переменной, а математические модели, описывающие наблюдаемые переменные, могут быть получены на основании одних лишь экспериментальных данных. В этом случае полезны модели типа авторегрессии (АР) и авторегрессии — скользящего среднего (АРСС), которые после удаления нестационарного тренда с успехом можно использовать для решения различного рода диагно-

стических задач. Так, например, в работе [1] решается задача обнаружения неизвестного заранее момента изменения свойств наблюдаемой последовательности значений контролируемого параметра с целью выявления фазы перехода механической системы из одного состояния в другое. Незвестный момент изменения свойств определяется по наибольшему значению функции правдоподобия, которая достаточно просто выражается через коэффициенты модели АР или АРСС. Однако недостатком указанного метода является то обстоятельство, что на практике встречаются случаи, когда у исследуемых процессов уровень сигнала, характеризуемый дисперсией, постоянно меняется, являясь неизвестной заранее функцией времени. Например, уровень вибрации машины в процессе эксплуатации может меняться, оставаясь при этом в пределах ограничений, оговоренных в технических условиях, и не свидетельствует о появлении какой-либо неисправности. Однако при использовании метода [1] изменение дисперсии контролируемого параметра может быть воспринято как нарушение нормального процесса функционирования.

Поэтому в настоящей статье ставится задача разработки метода оценки момента изменения состояния объекта, работоспособного в условиях фоновых искажений наблюдаемых последовательностей значений контролируемых параметров.

Если задачу обнаружения перехода исследуемого объекта из одного состояния в другое сформулировать как задачу определения момента изменения свойств последовательности значений контролируемого параметра в результате такого перехода, а для описания экспериментальных данных воспользоваться моделью АР, то решение поставленной задачи сведется к определению момента изменения свойств последовательности АР. Тогда, представив модель исследуемого объекта как систему, на вход которой подается последовательность независимых случайных величин V_t с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, структуру контролируемого параметра $x_t = (\dots, x_1, x_2, \dots, x_N, \dots)$ можно описать моделью АР вида

$$x_t = -a_1^{(1)}x_{t-1} - \dots - a_{p_1}^{(1)}x_{t-p_1} + b(t)V_t, \quad (1)$$

где $b(t)$ — дисперсия, $A_i = (a_1^{(i)}, \dots, a_{p_i}^{(i)})$, $i = 1, 2$, — известные параметры модели, удовлетворяющие условию устойчивости (т. е. корни характеристического уравнения $z^p + a_1^{(i)}z^{p-1} + \dots + a_p^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$, находятся внутри единичной окружности [2]).

Полагая известными только коэффициенты модели АР до и после предполагаемого момента изменения состояния объекта:

$$A_i = \begin{cases} A_1, & t = \dots, p_{\max} + 1, \dots, U; \\ A_2, & t = U + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2)$$

можно найти оптимальный прогноз \tilde{x}_t величин x_t :

$$\tilde{x}_t = -a_1^{(1)}x_{t-1} - \dots - a_{p_1}^{(1)}x_{t-p_1}, \quad (3)$$

где $p_{\max} = \max(p_1, p_2 - 1)$; p_1, p_2 — порядок модели до и после момента изменения состояния объекта; N — длина исследуемой реализации.

Тогда среднеквадратическая ошибка прогноза $S_t(U)$ вычислится по соотношению

$$S_t(U) = (x_t - \tilde{x}_t)^2 = (x_t + a_1^{(1)}x_{t-1} + \dots + a_{p_1}^{(1)}x_{t-p_1})^2. \quad (4)$$

Здесь

$$i = \begin{cases} 1, & t \leq U; \\ 2, & t > U, \end{cases}$$

а суммарная среднеквадратическая ошибка прогноза определяется по формуле

$$S(U) = \sum_{t=p_{\max}+1}^N S_t(U) = \sum_{t=p_{\max}+1}^U (x_t + a_1^{(1)}x_{t-1} + \dots + a_{p_1}^{(1)}x_{t-p_1})^2 + \sum_{t=U+1}^N (x_t + a_1^{(2)}x_{t-1} + \dots + a_{p_2}^{(2)}x_{t-p_2})^2. \quad (5)$$

Следует отметить, что функция $S(U)$ может быть вычислена рекуррентно:

$$S(U) = -Y(U) + C_S. \quad (6)$$

Здесь

$$Y(U) = Y(U-1) - (x_t + a_1^{(1)}x_{t-1} + \dots + a_{p_1}^{(1)}x_{t-p_1})^2 + (x_t + a_1^{(2)}x_{t-1} + \dots + a_{p_2}^{(2)}x_{t-p_2})^2$$

при начальном условии $Y(p_{\max}) = 0$;

$$C_S = \sum_{t=p_{\max}}^N (x_t + a_1^{(2)}x_{t-1} + \dots + a_{p_2}^{(2)}x_{t-p_2})^2. \quad (7)$$

Суммарная среднеквадратическая ошибка прогноза как функции момента изменения при известных параметрах модели будет иметь наименьшее значение в точке, где произошло изменение состояния объекта U . Поэтому оценка момента изменения состояния объекта \hat{U} может быть найдена как точка, соответствующая наименьшему из возможных значений функции $S(U)$, где $p_{\max} < U < N$. Однако удобнее искать оценку \hat{U} как аргумент функции $[-S(U)]$. В этом случае требуется вычислить значение функции $[-S(U)]$ при всех предполагаемых значениях U и в качестве оценки \hat{U} принять ту точку U , в которой функция $[-S(U)]$ имеет наибольшее из всех возможных ее значений.

В работе [1] при решении аналогичной задачи дисперсия до и после момента изменения состояния объекта считается известной, а оценка \hat{U} момента изменения состояния объекта U находится как точка, соответствующая наибольшему значению функции правдоподобия $L(U/x)$. Функция правдоподобия при этом вычисляется рекуррентно по формуле

$$L(U/x) = D + U \ln \left| \frac{b_2}{b_1} \right| - \frac{1}{2} \left[\sum_{t=p_1+1}^U (x_t + a_1^{(1)}x_{t-1} + \dots + a_{p_1}^{(1)}x_{t-p_1})^2 / b_1^2 - \sum_{t=U+1}^N (x_t + a_1^{(2)}x_{t-1} + \dots + a_{p_2}^{(2)}x_{t-p_2})^2 / b_2^2 \right], \quad (8)$$

где b_1, b_2 — соответственно дисперсии до и после момента изменения состояния объекта; D — константа, не зависящая от U .

Из сравнения двух приведенных подходов видно, что рассматриваемый метод позволяет избежать влияния изменения дисперсии контролируемых параметров вследствие того, что в выражение суммарной среднеквадратической ошибки прогноза (6) в отличие от выражения функции правдоподобия (8) дисперсия не входит, что и является отличительной особенностью предлагаемого подхода.

В качестве примера использования предложенного подхода проводилась оценка момента изменения технического состояния газотурбинного двигателя (ГТД) в результате появления неисправностей. Так, например, изменение характера пульсации давления за компрессором является обычно проявлением таких серьезных неисправностей ГТД, как помпаж и вращающийся срыв в компрессоре, в короткое время приводящих к выходу двигателя из строя. Помпаж и вращающийся срыв характеризуются значительным увеличением амплитуды пульсаций давления и уменьшением их частоты по сравнению с режимом нормального функционирования. Однако пульсации давления за компрессором в режиме нормального функционирования часто имеют изменяющуюся амплитуду, что является следствием множества возмущений, имеющих случайный характер и влияющих на термодинамические процессы, протекающие в двигателе.

На рис. 1 представлены осциллограмма пульсаций давления за компрессором ГТД в режиме нормального функционирования и функция правдоподобия $L(U/x)$. По оси абсцисс отложена последовательность интервалов наблюдений $n\Delta t$, причем $\Delta t = 0,025$ с, а по оси ординат — давление \bar{P}_k в относительных единицах. Для описания пульсаций давления была принята модель АР с порядком $p_1 = p_2 = 2$. Как видно из рис. 1, функция правдоподобия имеет наибольшее значение при $n = 32$, что приводит к ошибочному заключению о появлении неисправности в данный момент времени, хотя исследуется режим нормального функционирования. Для той же реализации на рис. 2 показана суммарная среднеквадратическая ошибка прогноза $[-S(U)]$. Из рисунка видно, что функция $[-S(U)]$ представляет собой восходящую кривую, что позволяет сделать вывод об отсутствии изменения свойств и, следовательно, исправности ГТД.

На рис. 3, 4 приведены корреляционные функции K_1, K_2 и спектральные плотности S_1, S_2 реализации, представленной на рис. 1, соответственно до и после предполагаемого момента изменения U , полученного с использованием функции правдоподобия. Существенных отличий в характере приведенных функций относительно предполагаемого момента изменения не наблюдается, кроме мощности спектра. Следовательно, регистрируемое изменение состояния объекта по методу [1] связано с изменением дисперсии процесса и не является признаком нарушения нормального функционирования ГТД.

На рис. 5 представлена осциллограмма пульсаций давления за компрессором \bar{P}_k , отражающая переход от нормальной работы к помпажу компрессора ГТД и соответствующая функция правдоподобия $L(U/x)$. Момент изменения свойств, т. е. переход к помпажу, получается при $n = 28$. Для этой же осциллограммы (рис. 6) находилась оценка момента изменения свойств, но уже по суммарной среднеквадратической ошибке прогноза $[-S(U)]$. В данном случае оценка момента изменения получена при $n = 27$.

Таким образом, оба метода дали близкие значения оценки момента изменения свойств объекта при фактическом появлении неисправности.

Соответствующие корреляционные функции и спектральные плотности до (K_1, S_1) и после (K_2, S_2) фактического момента изменения представлены на рис. 7, 8. В отличие от вышеприведенного случая рассматриваемые функции различаются как

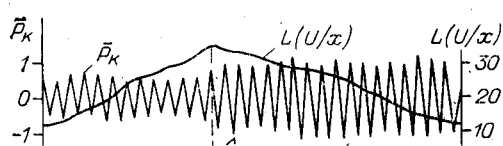


Рис. 3. Корреляционные функции до (K_1) и после (K_2) предполагаемого момента изменения свойств.

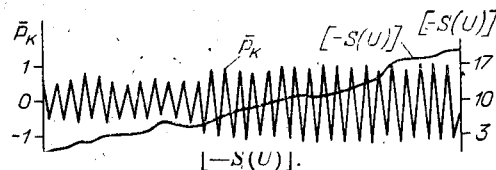


Рис. 4. Спектральные плотности до (S_1) и после (S_2) предполагаемого момента изменения свойств.

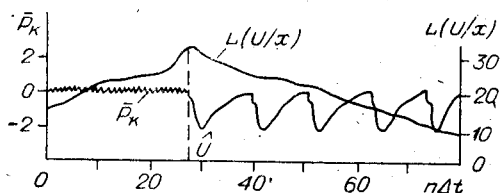


Рис. 5. Осциллограмма пульсаций давления за компрессором ГТД при переходе от устойчивой работы к помпажу компрессора и функция правдоподобия $L(U/x)$.

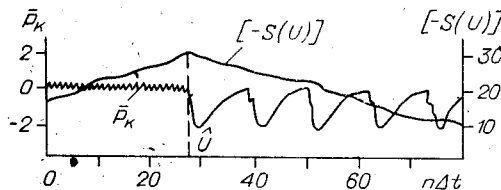


Рис. 6. Осциллограмма пульсаций давления за компрессором ГТД при переходе от устойчивой работы к помпажу компрессора и суммарная среднеквадратическая ошибка прогноза $[-S(U)]$.

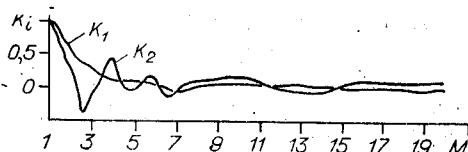
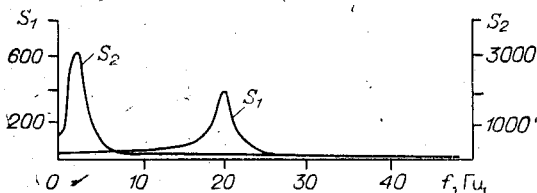


Рис. 7. Корреляционные функции до (K_1) и после (K_2) момента перехода к помпажу компрессора ГТД.

Рис. 8. Спектральные плотности до (S_1) и после (S_2) момента перехода к помпажу компрессора ГТД.



характером, так и масштабом, что является следствием значимого изменения статистических свойств анализируемого процесса.

В заключение следует отметить, что предложенный метод, позволяющий исключить принятие ошибочных решений о появлении неисправностей при периодическом изменении уровня пульсаций контролируемого параметра в режиме нормального функционирования, имеет несомненное преимущество перед методом, базирующимся на расчете функции правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конюхов Б. М., Липейкене И. К., Шепель В. Т. Контроль технического состояния газотурбинного двигателя.— В кн.: Статистические проблемы управления. Вильнюс: ИМК АН ЛитССР, 1980, вып. 44, с. 25.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.— М.: Мир, 1974, вып. 1.

Поступило в редакцию 17 августа 1983 г.

УДК 621.396.962 : 519.217

Ю. Н. ГОРБУНОВ
(Челябинск)

МНОГОЭТАПНАЯ ПРОЦЕДУРА ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОВТОРЯЮЩЕГОСЯ СИГНАЛА МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ОТСЧЕТОВ

Введение. В ряде задач радиолокации и измерительной техники процесс измерения параметров повторяющегося сигнала (задержки, фазы, амплитуды) организуется по серии (пачке) n импульсов. В том случае когда искомый параметр в процессе измерения флуктуирует незначительно, ошибки цифрового измерения можно уменьшить за счет стохастического (по Монте-Карло) усреднения «грубых» отсчетов. Рандомизация измерений достигается «подмешиванием» случайной добавки, изменением по случайному закону порогов квантования и т. п. (в статье используется первый способ). Идейной основой данного метода, как и метода Монте-Карло, является закон больших чисел, согласно которому увеличение числа отсчетов n повышает точность измерения (для независимых испытаний в $n^{1/2}$ раз).

На основе уже доказанной в работе * возможности применения обратной связи в процедуре измерения в настоящей статье весь объем n испытаний разбивается на l этапов и дается ответ на вопрос, какой точности измерения параметров повторяющегося сигнала можно достичь за счет организации многоэтапности измерений.

Постановка задачи. Измерение (оценивание) методом Монте-Карло параметра τ повторяющегося сигнала проводится путем его сравнения с некоторой эталонной шкалой, имеющей шаг (дискретность) размером τ_0 . Если моменты времени τ , задающие положение измеряемых интервалов, от испытания к испытанию независимы и равномерно распределены в пределах интервала τ_0 , то «грубые» отсчеты будут отличаться на величину $\mu_i \tau_0$, где $\mu_i = 1$ с вероятностью $p = R\{\tau/\tau_0\}$ и $\mu_i = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$ ($R\{\tau/\tau_0\}$ — функция дробной доли отношения τ/τ_0). Статистика

совпадений $m = \sum_{i=1}^n \mu_i$ в n испытаниях распределена по биномиальному закону.

Вероятность p можно оценить по частоте совпадений $p^* = m/n$, поэтому параметр τ имеет оценку $\tau^* = \tau_0(E\{\tau/\tau_0\} + p^*) = \tau_0(E\{\tau/\tau_0\} + m/n)$, где $E\{\tau/\tau_0\}$ — функция целой части τ/τ_0 («грубый» отсчет). Среднеквадратическая ошибка σ_τ оценки τ^* равна

$$\sigma_\tau = \sqrt{M\{(\tau^* - \tau)^2\}} = \tau_0 \sqrt{M\{(p^* - p)^2\}} = \tau_0 \sqrt{D_0} = \tau_0 \sigma.$$

Здесь $\sigma = \sqrt{D_0} = \sqrt{M\{(p^* - p)^2\}} = \sqrt{pq/n}$ — среднеквадратическая ошибка измерения вероятности p по частоте m/n , $M\{\cdot\}$ — операция математического ожидания. Таким образом, погрешность σ_τ измерения τ (при фиксированном шаге дискретизации τ_0) без разбиения на этапы полностью определяется погрешностью σ , которая в зависимости от n уменьшается сравнительно медленно и имеет порядок $n^{-1/2}$.

Многоэтапная процедура. Резервы повышения точности целесообразно искать в разбиении всего объема n испытаний на l этапов и организации рекуррентной зависимости испытаний с использованием эталонных добавок. Алгоритм формирования оценок p_i^* , $i = 1, 2, \dots, l$, вероятности p на i -м этапе включает в себя следующие операции. После 1-го этапа формируется оценка $p_1^* = m_1/n_1$ вероятности p . По этой оценке вырабатывается корректирующая добавка $\delta_1 = 1 - p_1^*$, сводящая измерения

* Гайсов В. Г., Горбунов Ю. Н. Двухэтапная процедура измерения временных интервалов методом статистических испытаний с обратной связью.— Автометрия, 1982, № 2.