УДК 519.24

Е. Л. КУЛЕШОВ

(Владивосток)

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Непараметрические методы оценивания спектральной плотности основаны на вычислении периодограммы или ковариационной оценки и последующем применении сглаживающих окон. Но кроме этого традиционного пути для получения спектральной оценки можно использовать методы решения некорректных задач [1]. Действительно, на основе корреляционной оценки или периодограммы может быть получена спектральная оценка соответственно суммированием ряда Фурье с неточно заданными коэффициентами или решением интегрального уравнения первого рода с неточно заданной правой частью. Как известно [1], обе задачи являются неустойчивыми. Хотя уравнение для спектральной оценки упоминается в [2, 3], методы решения некорректных задач для получения спектральных оценок, по существу, не применялись. В этой связи представляет интерес определение соотношений между регуляризованными решениями и решениями, получаемыми с помощью традиционных методов корреляционно-спектральных окон [3]. В данной работе показано, что эти два подхода практически совпадают. Установлена связь между параметром регуляризации и длиной реализации исследуемого процесса. Получены оптимальные оценки, обобщающие решение Ломницкого и Зарембы.

Уравнение для спектральной оценки. Пусть стационарный случайный процесс $x(t)$, наблюдаемый на интервале $[t_0, t_0+T]$, имеет нулевое среднее $Mx(t)=0$, ковариационную функцию $B(\tau)$ и спектральную плотность $F(\omega)$. Если $f_0(\omega)$ — периодограмма и $h(\omega)$ — спектральное окно, то

$$f_c(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda)\, h(\omega-\lambda)\, d\lambda \qquad (1)$$

— сглаженная оценка спектральной плотности [3]. Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda)\, h(\omega-\lambda)\, d\lambda = F_c(\omega), \qquad (2)$$

где $F_c(\omega)=Mf_c(\omega)$ — сглаженная спектральная плотность, $\Psi(\omega)=F(\omega)-G'(\omega)/T$ и $G(\omega)=\int_{-T}^{T} B(\tau)\sin\omega|\tau|\,d\tau$. Правая часть уравнения (2) может быть оценена по формуле (1). Действительно, f_c — несмещенная оценка сглаженного спектра, так как $Mf_0(\omega)=\Psi(\omega)$ [4]. Если ширина спектрального окна выбрана большой по сравнению с величиной $1/T$, то дисперсия $\operatorname{var} f_c$ оценки f_c будет существенно меньше $\operatorname{var} f_0$ [3], т. е. (1) с хорошей точностью определяет функцию F_c. Таким образом, соотношение (2) — интегральное уравнение первого рода относительно Ψ с неточно заданной правой частью. Как известно [1], такая задача некорректна, и для определения Ψ следует использовать методы регуляризации. Если же T недостаточно велико, то решение имеет смещение $-G'/T$, для снижения которого могут оказаться применимы методы, развитые в работе [4].

Пусть $B_c(\tau)$, $\psi(\tau)$, $H(\tau)$ — фурье-преобразования функций F_c, Ψ, h, тогда $B_c(\tau)=2\pi\psi(\tau)H(\tau)$. Отсюда определяется $\psi(\tau)$, и обратное преобразование Фурье позволяет получить решение $\Psi(\omega)$. Однако замена правой части (2) функцией f_c приводит в последнем соотношении к замене B_c сглаженной ковариационной оценкой β_c [3], и обратное фурье-преобразование становится неустойчивым. Очевидно, что решением (2) при этом является периодограмма. Для получения устойчивого решения уравнений вида (2) в [1] предлагается применять стабилизирующий множитель $H_\alpha(\tau)=H^2(\tau)/[H^2(\tau)+\alpha d(\tau)]$, где α — параметр регуляризации, $d(\tau)$ — четная неотрицательная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условиям: $d(0)\geqslant 0$; $d(\tau)>0$, $\tau\neq 0$; для любого α H_α — функция с интегрируемым квадратом. Тогда регуляризованное решение

$$f_\alpha(\omega)=\int_{-T}^{T} e^{-i\omega\tau} H_\alpha(\tau)\,\beta_0(\tau)\,d\tau, \qquad (3)$$

где $\beta_0(\tau)=\beta_c(\tau)/[2\pi H(\tau)]$ — оценка ковариационной функции [3]. Здесь прослеживается полная аналогия с методом корреляционно-спектральных окон, применяемым при анализе случайных процессов. Действительно, стабилизирующий множитель H_α удовлетворяет всем условиям для корреляционных окон, а f_α представляет собой сглаженную оценку спектральной плотности [3]. Такие недостатки метода сглаживающих окон, как интуитивный выбор формы и ширины окна, характерны и для метода регуляризации, поскольку функция H может быть в значительной мере произвольной [3], а точно определить параметр регуляризации, задающий ширину окна H_α, из уравнения невязки [1] невозможно, так как в данном случае величина невязки неизвестна и может быть найдена только приближенно.

Соотношение между параметром регуляризации и длительностью реализации. Пусть t дискретно и оценка ковариационной функции

$$\beta_0(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)\, x(t+|\tau|), \quad |\tau| \leqslant T. \tag{4}$$

Спектральную оценку можно вычислять суммированием ряда Фурье с коэффициентами β_0. Как известно [1], задача суммирования ряда Фурье неустойчива, поэтому и оценка f_0 спектральной плотности, определяемая через ковариационную оценку (4), неустойчива. Возьмем за меру уклонения оценок от истинных величин их среднеквадратические ошибки. Тогда для β_0 ошибка имеет порядок $1/T$ и может быть сделана малой при больших T, при этом ошибка для $f_0(\omega)$ примерно равна $F(\omega)$ [3]. По определению [1], такая задача неустойчива и метод регуляризации в данном случае выглядит следующим образом. Рассматривается сглаживающий функционал $\Omega = \sum_\tau [\beta_0(\tau) - \beta_c(\tau)]^2 + \alpha \sum_\tau \beta_c^2(\tau)\, a(\tau)$, где первое слагаемое — невязка, второе — стабилизатор, α — параметр регуляризации, $a(\tau)$ — последовательность положительных чисел, порядок роста которых не ниже τ^2. Минимизация Ω по $\beta_c(\tau)$ приводит к сглаженной ковариационной оценке

$$\beta_c(\tau) = \beta_0(\tau)/[1 + \alpha a(\tau)]. \tag{5}$$

Теперь суммирование ряда Фурье с коэффициентами (5) устойчиво. Функция $1/(1 + \alpha a)$ является корреляционным окном, применение которого приводит к появлению смещения корреляционной оценки

$$b(\tau) = [(1 - |\tau|/T)/(1 + \alpha a(\tau))]B(\tau) - B(\tau). \tag{6}$$

При $T \to \infty$ ошибка оценки β_0 уменьшается до нуля [3] и параметр регуляризации $\alpha \to 0$ [1]. Поэтому $\lim\limits_{T\to\infty} b(\tau) = 0$.

Пусть $a(\tau) = \tau^2$, тогда корреляционному окну (5) соответствует спектральное окно $h(\omega) = \exp(-|\omega|/\sqrt{\alpha})/(2\sqrt{\alpha})$. При этом для больших T по известным формулам [3] можно вычислить $\operatorname{var} f_c/\operatorname{var} f_0 \sim 1/(T\sqrt{\alpha})$. Отсюда следует, что условия

$$\lim_{T\to\infty} \sqrt{\alpha} = 0, \quad \lim_{T\to\infty} T\sqrt{\alpha} = \infty \tag{7}$$

гарантируют при $T \to \infty$ нулевое смещение и нулевую дисперсию. Параметр регуляризации α должен быть согласован с длиной реализации T, например,

$$\alpha \sim 1/T. \tag{8}$$

Отметим, что $\sqrt{\alpha}$ имеет смысл ширины спектрального окна, а функция $h(\omega)$ относится к классу спектральных окон, рассмотренных Парзеном [5].

Оптимальное оценивание спектральной плотности. Наряду с асимптотическими свойствами процедуры оценивания, на практике весьма важна и ее оптимизация, т. е. получение оценки с минимальной погрешностью при фиксированном T. Подобная оптимизация в задаче суммирования ряда Фурье с неточно заданными коэффициентами проведена в [1]. Рассмотрим этот подход в приложении к оценке спектральной плотности

$$f_c(\omega) = \sum_{\tau=-T}^{T} e^{-i\omega\tau} \beta_0(\tau)/[1 + \alpha a(\tau)], \quad |\omega| \leqslant \pi. \tag{9}$$

Определим уклонение ε оценки f_c от спектральной плотности F соотношением

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M\,[f_c(\omega) - F(\omega)]^2\, d\omega. \tag{10}$$

Оценка (9) может быть оптимизирована выбором последовательности $a(\tau)$ при заданном α или выбором коэффициента пропорциональности в соотношении (8) при заданной последовательности $a(\tau)$. Проведем оптимизацию первым способом. Из соотношений (9), (10)

$$\varepsilon^2 = \sum_\tau M\,[(\beta_0(\tau)/(1 + \alpha a(\tau))) - B(\tau)]^2. \tag{11}$$

Условия минимума ε^2 $(\partial\varepsilon^2/\partial a = 0, \quad |\tau| = 0, 1, \ldots, T)$ определяют оптимальное окно

$$1/[1 + \alpha a(\tau)] = BM\beta_0/[(M\beta_0)^2 + \operatorname{var}\beta_0]. \tag{12}$$

Для получения этой формулы не использовался явный вид (4) ковариационной оценки β_0, поэтому (12) справедливо для ковариационной оценки произвольного вида. Если рассматривается несмещенная оценка $\beta(\tau) = \beta_0(\tau)T/(T - |\tau|)$, то оптимальное корреляционное окно $1/(1+\alpha a) = B^2/(B^2 + \mathrm{var}\,\beta)$. Пусть τ_0 — интервал корреляции случайного процесса $x(t)$, тогда при $T \gg \tau_0$ из (12) следует, что $1/[1+\alpha a(\tau)] = B^2/[B^2 + \mathrm{var}\,\beta_0]$. Этот результат другим способом был получен Ломницким и Зарембой и приведен в [3]. Подстановка (12) в (11) дает минимальное значение уклонения

$$\varepsilon^2_{\min} = \sum_\tau B^2\ (\tau) \cdot \left[1 - (M\beta_0)^2/\left((M\beta_0)^2 + \mathrm{var}\,\beta_0\right)\right]. \qquad (13)$$

Отметим, что оптимальная в смысле минимума интегрального среднеквадратического уклонения (10) спектральная оценка для корреляционных окон (12) инвариантна на множестве несглаженных корреляционных оценок $\beta_\text{к}(\tau) = \beta_0(\tau) \sum_{i=0}^{k} (|\tau|/T)^i$, $k = 0, 1, \ldots$ (или соответствующих несглаженных спектральных оценок $f_\text{к}$). Этим же свойством обладает минимальное уклонение (13) оптимальной оценки от спектральной плотности.

Для доказательства этого учтем, что формулы (12), (13) справедливы для корреляционных оценок произвольного вида. Подстановка $\beta_\text{к}$, $M\beta_\text{к} = (1 - |\tau|/T)\, B(\tau) \times \sum_{i=0}^{k} (|\tau|/T)^i$ и $\mathrm{var}\,\beta_\text{к} = \left[\sum_{i=0}^{k} (|\tau|/T)^i\right]^2 \mathrm{var}\,\beta_0$ в (13) и в соотношение для оптимальной оценки $\beta_0/(1+\alpha a(\tau))$ вместо β_0 и соответствующих характеристик оценки β_0 приводит к одинаковым результатам независимо от $k = 0, 1, \ldots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
2. **Коняев К. В.** Спектральный анализ случайных океанологических полей.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
3. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1971, 1972, вып. 1, 2.
4. **Кулешов Е. Л.** Метод компенсации смещения спектральной оценки.— В кн.: Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. Всесоюз. конф., Нальчик, 1—3 ноября 1982 г.— М.: МЭИ, 1982, ч. 1.
5. **Parzen E.** On consistent estimates spectrum of stationary time series.— The Annals of Math. Statistics, 1957, vol. 28, N 2, p. 329—348.

Поступило в редакцию 4 января 1984 г.

УДК 621.45 : 621.438

Б. М. КОНЮХОВ, И. К. ЛИПЕЙКЕНЕ, В. Т. ШЕПЕЛЬ

(Андропов Ярославской)

ОЦЕНКА МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Большинство современных механических систем оказываются слишком сложными для того, чтобы создать достаточно подробную их математическую модель путем идеализации и постулирования общих закономерностей. Однако хотя неполное понимание физического механизма процессов, происходящих в отмеченных системах, не позволяет построить математическую модель, надлежащим образом записанные экспериментальные данные полностью содержат в себе недостающую информацию, относящуюся к наблюдаемой переменной, а математические модели, описывающие наблюдаемые переменные, могут быть получены на основании одних лишь экспериментальных данных. В этом случае полезны модели типа авторегрессии (АР) и авторегрессии — скользящего среднего (АРСС), которые после удаления нестационарного тренда с успехом можно использовать для решения различного рода диагно-