АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1985

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.317 : 519.21

М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В работе [1] структура решения систем интегральных уравнений Винера — Хопфа методом неопределенных коэффициентов характеризуется довольно просто. Никаких сложностей в получении матрицы решения с точностью до коэффициентов полиномов, находящихся в числителях ее элементов, нет. Эти коэффициенты затем определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Однако вопрос о том, как распределяются эти коэффициенты среди элементов матрицы передаточных функций, требует большой наблюдательности.

В статье на основе алгоритма, предложенного в [2, 3], разработана простая процедура определения структуры и параметров полиномов, находящихся в числителях элементов матрицы решения.

Алгоритм определения знаменателя элементов матрицы решения. Обоснование этого алгоритма проводится с использованием материала, приведенного в [1]. Уравнение Винера — Хопфа в области изображений имеет следующий вид:

$$G(s)K_j(s) - C_j(s) = \Gamma_j(s), \tag{1}$$

где $G(s)$ — матрица; $C_j(s)$ — вектор, элементы которого дробно-рациональные функции; $K_j(s)$ — вектор искомых передаточных функций; $\Gamma_j(s)$ — неизвестный вектор, элементы которого имеют полюсы только в правой полуплоскости комплексного переменного.

Умножим обе части уравнения (1) слева на $G^{-1}(s)$. В результате получим

$$K_j(s) = G^{-1}(s)[C_j(s) + \Gamma_j(s)] = A(s)[C_j(s) + \Gamma_j(s)]/|G(s)|. \tag{2}$$

Здесь элементы матрицы $A(s)$ являются алгебраическими дополнениями матрицы $G(s)$, $|G(s)|$ — определитель матрицы $G(s)$. Разложим $|G(s)|$ так, что

$$|G(s)| = G^+(s)G^-(s). \tag{3}$$

Все полюсы и нули $G^+(s)$ лежат в левой полуплоскости и на мнимой оси, а $G^-(s)$ — только в правой полуплоскости. В [3] приведен способ, используя который можно добиться, что $G^-(s)$ не будет иметь полюсов на мнимой оси.

С учетом (3) перепишем уравнение (2):

$$G^+(s)K_j(s) = A(s)[C_j(s) + \Gamma_j(s)]/G^-(s). \tag{4}$$

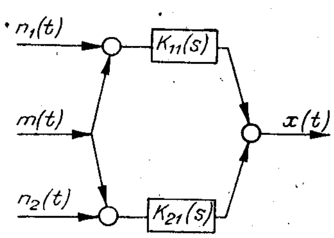
Так как у каждого из элементов вектора $G^+(s)K_j(s)$ полюсы расположены только в левой полуплоскости, то из (4) следует

$$G^+(s)K_j(s) = [A(s)C_j(s)/G^-(s)]_+ + [A(s)\Gamma_j(s)/G^-(s)]_+. \tag{5}$$

Здесь символ $[\ ]_+$ эквивалентен операции разложения каждого элемента матрицы в ряд с последующим восстановлением целой части, а также тех членов, которые имеют полюсы только в левой полуплоскости. Из (5) вытекает, что

$$K_j(s) = [A(s)C_j(s)/G^-(s)]_+/G^+(s) + [A(s)\Gamma_j(s)/G^-(s)]_+/G^+(s). \tag{6}$$

Проанализируем полученное выражение. Определим полюсы r-го элемента вектора $[A(s)C_j(s)/G^-(s)]_+/G^+(s)$. В них будут входить полюсы r-го элемента вектора $A(s)C_j(s)$, находящиеся в левой полуплоскости комплексного переменного, и нули $G^+(s)$, расположенные в той же полуплоскости. Вычислим полюсы r-го элемента вектора $[A(s)\Gamma_j(s)/G^-(s)]_+/G^+(s)$. Поскольку полюсы элементов вектора $\Gamma_j(s)$ лежат



только в правой полуплоскости, находим, что r-й элемент рассматриваемого вектора содержит полюсы r-й строки матрицы $A(s)$, расположенные в левой полуплоскости, и нули $G^{+}(s)$. Если лежащие в левой полуплоскости полюсы r-й строки матрицы $A(s)_{+}$ и r-го элемента вектора $A(s)C_j(s)$ совпадают с полюсами $G^{+}(s)$, то они аннулируются. Итак, r-й элемент вектора $K_j(s)$ состоит из неаннулированных левых полюсов r-го элемента вектора $A(s)C(s)$ и r-й строки матрицы $A(s)$, а также нулей $G^{+}(s)$.

Алгоритм определения числителя элементов матрицы решения. Используя приведенный в (2) способ, преобразуем уравнение (1) к виду

$$G(s)K_j(s) - P_j(s) - C_j(s)_{+} = 0. \tag{7}$$

Здесь $P_j(s)$ — вектор, элементы которого имеют вид

$$P_j(s) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{\nu_r} \frac{a_i^{ur}}{\alpha_i^{ur} - s} K_{rj}\left(\alpha_i^{ur}\right). \tag{8}$$

Входящая в (8) дробно-рациональная функция определяется с помощью соотношения

$$G_{lr}(s) = \sum_{i=1}^{\nu_r} \frac{a_i^{ur}}{\alpha_i^{ur} - s} - \sum_{l=1}^{\mu_r} \frac{b_i^{ur}}{\beta_i^{ur} - s} + \sum_{q=0}^{\chi} c_q^{ur} s^q, \quad \operatorname{Re}\alpha_i^{ur} > 0, \quad \operatorname{Re}\beta_l^{ur} < 0. \tag{9}$$

Элементы вектора $K_j(s)$ представляют собой дробно-рациональные функции, т. е. $K_{rj}(s)$ можно записать в виде

$$K_{rj}(s) = D_{rj}(s)/B_{rj}(s). \tag{10}$$

Полином $B_{rj}(s)$, согласно изложенному выше, известен. Используя (10), преобразуем первый член уравнения (7) следующим образом:

$$G(s)K_j(s) = U(s)D_j(s), \tag{11}$$

где $D_j(s)$ — вектор, составленный из входящих в (10) элементов $D_{rj}(s)$. С учетом (11) уравнение (7) перепишется так:

$$U(s)D_j(s) - P_j(s) - C_j(s)_{+} = 0. \tag{12}$$

Из (12) определяем искомый вектор $D_j(s)$:

$$D_j(s) = U(s)^{-1}(P_j(s) + C_j(s)_{+}). \tag{13}$$

Неизвестные $K_{rj}\left(\alpha_i^{ur}\right)$ отыскиваются из условий, что элементы $D_j(s)$ — полиномиальные функции.

Пример. В качестве иллюстрации данного метода рассмотрим пример, приведенный в [1]. Возьмем систему с двумя входами и одним выходом. Предполагается, что сигналы на оба входа поступают одинаковые, но искажаются разными белыми шумами. Пусть

$$G_{mm}(s) = 1/(1 - s^2); \quad G_{n_1 n_1}(s) = 0{,}5; \quad G_{n_2 n_2}(s) = 0{,}25. \tag{П1}$$

Функция фильтра состоит в том, чтобы выделить сигнал $m(t)$ из этих двух разных каналов (см. рисунок). Для этой задачи матрицы, входящие в (1), будут иметь следующий вид:

$$G(s) = \begin{Vmatrix} \dfrac{3 - s^2}{2(1 - s^2)} & \dfrac{1}{1 - s^2} \\ \dfrac{1}{1 - s^2} & \dfrac{5 - s^2}{4(1 - s^2)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1 - s} + \dfrac{1}{1 + s}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1 - s} + \dfrac{1}{1 + s}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1 - s} + \dfrac{1}{1 + s}\right) & \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1 - s} + \dfrac{1}{1 + s}\right) \end{Vmatrix}; \tag{П2}$$

$$C_1(s) = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{1 - s^2} \\ \dfrac{1}{1 - s^2} \end{Vmatrix}.$$

Найдем матрицы $A(s)$, $A(s)C(s)$ и определитель $G^+(s)$:

$$A(s)=\begin{Vmatrix} \frac{5-s^2}{4(1-s^2)} & \frac{-1}{1-s^2} \\ \frac{-1}{1-s^2} & \frac{3-s^2}{2(1-s^2)} \end{Vmatrix}; \quad A(s)\,C_1(s)=\begin{Vmatrix} \frac{1}{4(1-s^2)} \\ \frac{1}{2(1-s^2)} \end{Vmatrix}; \quad G^+(s)=\frac{s+\sqrt{7}}{\sqrt{8}\,(s+1)}. \qquad (\text{П3})$$

Из соотношений (П3) определим знаменатель элементов вектора $K_1(s)$

$$B_{11}(s)=s+\sqrt{7}, \quad B_{21}(s)=s+\sqrt{7}, \qquad (\text{П4})$$

а затем, используя соотношения (9), (10) и (П4), матрицу $U(s)$:

$$G(s)\,K_1(s)=\begin{Vmatrix} \frac{3-s^2}{2(1-s^2)} & \frac{1}{1-s^2} \\ \frac{1}{1-s^2} & \frac{5-s^2}{4(1-s^2)} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{D_{11}(s)}{s+\sqrt{7}} \\ \frac{D_{21}(s)}{s+\sqrt{7}} \end{Vmatrix} = U(s)\,D_1(s)=$$

$$=\begin{Vmatrix} \frac{3-s^2}{2(1-s^2)(s+\sqrt{7})} & \frac{1}{(1-s^2)(s+\sqrt{7})} \\ \frac{1}{(1-s^2)(s+\sqrt{7})} & \frac{5-s^2}{4(1-s^2)(s+\sqrt{7})} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} D_{11}(s) \\ D_{21}(s) \end{Vmatrix}. \qquad (\text{П5})$$

Найдем входящие в (12) векторы $P_j(s)$, $C_j(s)_+$ и матрицы $U^{-1}(s)$:

$$P_1(s)=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-s}(K_{11}(1)\,K_{21}(1)) \\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-s}(K_{11}(1)\,K_{21}(1)) \end{Vmatrix}; \quad C_1(s)_+=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{1+s} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1+s} \end{Vmatrix};$$

$$U^{-1}(s)=\begin{Vmatrix} 2\frac{5-s^2}{\sqrt{7}-s} & \frac{-8}{\sqrt{7}-s} \\ \frac{-8}{\sqrt{7}-s} & 4\frac{3-s^2}{\sqrt{7}-s} \end{Vmatrix}. \qquad (\text{П6})$$

Из соотношения (12) получаем вектор

$$D_1(s)=\begin{Vmatrix} 2\frac{5-s^2}{\sqrt{7}-s} & \frac{-8}{\sqrt{7}-s} \\ \frac{-8}{\sqrt{7}-s} & 4\frac{3-s^2}{\sqrt{7}-s} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{7}+1}\ \frac{1}{1-s}\ (D_{11}(1)+D_{21}(1))+\frac{1}{1+s}\right\} \\ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{7}+1}\ \frac{1}{1-s}(D_{11}(1)+D_{21}(1))+\frac{1}{1+s}\right\} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} \frac{(1+L)-(1-L)\,s}{\sqrt{7}-s} \\ 2\,(\frac{L+1)-(1-L)\,s}{\sqrt{7}-s} \end{Vmatrix}. \qquad (\text{П7})$$

Здесь $K_{11}(1)=D_{11}(1)/(\sqrt{7}+1)$, $K_{21}(s)=D_{21}(1)/(\sqrt{7}+1)$, $L=D_{11}(1)+D_{21}(1)$. В силу того что элементы вектора $D_1(s)$ — функции полиномиальные, из (П7) следует, что $\sqrt{7}$ является корнем числителя, т. е. $(1+L)-(1-L)\sqrt{7}=0$, откуда

$$L=(\sqrt{7}-1)/(\sqrt{7}+1). \qquad (\text{П8})$$

Подставив значение L в (П7), запишем элементы матрицы $D_1(s)$: $D_{11}(s)=2/(\sqrt{7}+1)$, $D_{21}(s)=4/(\sqrt{7}+1)$. Используя (10), окончательно получим

$$K_{11}(s)=2/(\sqrt{7}+1)(s+\sqrt{7}), \quad K_{21}=4/(\sqrt{7}+1)(s+\sqrt{7}). \qquad (\text{П9})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Современная** теория систем управления/Под ред. К. Т. Леондеса.— М.: Наука, 1970.
2. **Зотов М. Г.** Решение систем интегральных уравнений при оптимальном синтезе многомерных систем.— Автометрия, 1973, № 4.
3. **Зотов М. Г.** Об одном алгоритме решения интегральных уравнений Винера — Хопфа.— Автометрия, 1983, № 1.

Поступило в редакцию 11 апреля 1984 г.