

Доказательство следствия. При $r = m = 1$ приходится решать следующую экстремальную задачу:

$$\begin{aligned} & (f(t_{i-2}) - S_1(t_{i-2}))^2 + (f(t_i) - S_1(t_i))^2 + \\ & + \left(f(t_{i-1}) - \frac{h_{i-1}S_1(t_{i-2}) + h_{i-2}S_1(t_i)}{h_{i-2} + h_{i-1}} \right)^2 + \left(f(t_{i+1}) - \frac{h_{i+1}S_1(t_i) + h_i S_1(t_{i+2})}{h_i + h_{i+1}} \right)^2 + \\ & + (f(t_{i+2}) - S_1(t_{i+2}))^2 \rightarrow \min_{S_1(t_{i-2}), S_1(t_i), S_1(t_{i+2})} \end{aligned}$$

Из необходимых условий экстремума находим систему уравнений для отыскания $S_1(t_{i-2})$, $S_1(t_i)$, $S_1(t_{i+2})$, разрешая которую относительно $S_1(t_i)$, получаем формулу (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумилов Б. М. Применение локальной аппроксимации сплайнами в задаче предварительной обработки информации.— В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 93). Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982, с. 66—72.
2. Шакин В. В. Вычислительная электрокардиография.— М.: Наука, 1981.
3. Архипов А. Е. Об одном методе кусочно-полиномиальной аппроксимации.— Вестн. Киев. политехн. ин-та. Техн. кибернетика, 1980, № 4, с. 22—26.
4. Бреев И. М. Алгоритм поиска точек излома в экспериментальных зависимостях при автоматизированной обработке данных.— В кн.: Системы и методы автоматизации научных исследований. М.: Наука, 1981, с. 96—98.
5. Валужие В. А. К., Парчяускас Г. А. Программный комплекс для анализа поликардиограмм.— В кн.: Теория и практика автоматизации электрокардиологических исследований (Материалы симпозиума, сент. 1981). Каунас: Мин. здрав. ЛитССР, 1981, с. 84—91.
6. Шумилов Б. М. Локальная аппроксимация сплайнами: формулы, точные на сплайнах.— Новосибирск, 1981 (Препринт АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ). Семинар «Методы вычислительной и прикладной математики»/Под руководством Г. И. Марчука—N 86.
7. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.
8. Михотин В. Д., Чувькин Б. В. Использование сплайнов для восстановления дискретизированных сигналов.— Измерение, контроль, автоматизация, 1982, № 3(43), с. 17—24.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамановича.— М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 15 сентября 1983 г.;
окончательный вариант — 19 марта 1984 г.

УДК 519.24 : 621.391.14

В. В. КУРИЛКИН
(Люберцы Московской)

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ПАРЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕК

В некоторых разделах статистической теории принятия решений часто ставится задача определения параметров ансамбля случайных потоков, характеризующих те или иные физические процессы, например потоков заряженных частиц в ядерной физике, радиоастрономии и т. д. [1]. В этом случае определенному физическому процессу ставится в соответствие поток случайных точек, характеристики которого полностью (или с достаточной степенью точности аппроксимации) описывают поведение анализируемого процесса.

В предлагаемой статье решается одна из задач подобного рода — оценка числа парциальных одноточечных потоков случайных точек с

известными статистическими характеристиками по наблюдаемым характеристикам реализации суммарного потока, образованного суперпозицией парциальных потоков на некоторой дискретной линейной области, и нахождение доверительных границ полученной оценки.

Представим парциальный поток как поток одиночных случайных точек, выпадающих независимо и равномерно на некоторой дискретной линейной области Ω размером K элементов (дискретных позиций) (рис. 1*). Пусть точки от N парциальных потоков** образуют на Ω некоторую подобласть ω размером k с числом n (заштрихованные ячейки на рис. 1) выпавших на ней точек от N потоков (заметьте, что отдельные точки от N потоков могут выпадать в одну и ту же позицию области Ω с ненулевой вероятностью).

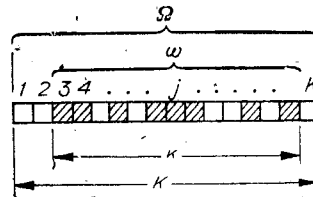


Рис. 1.

Положим, что вероятность Q появления точки парциального потока в данной реализации априорно известна, а вероятность ее попадания на произвольную позицию области Ω равна $1/K$. Вероятность «проявления» данной точки парциального потока на j -й позиции области Ω ($j = \overline{1, K}$), очевидно, есть Q/K .

При данной постановке задачи распределение числа n выпавших на Ω точек подчиняется биномиальному закону. Тогда в соответствии с [1] функцию правдоподобия $p(n/N)$ числа n выпавших точек от N потоков в линейной дискретной области Ω размером K элементов (позиций) в общем случае можно записать в следующей форме:

$$p(n/N) = \prod_{j=1}^K \bar{p}_{Nj} \sum_{\substack{j < \dots < l < \dots < i \\ i=1}}^K \dots \sum_{l=1}^K \dots \sum_{j=1}^K \frac{p_{Nj} \dots p_{Nl} \dots p_{Ni}}{\bar{p}_{Nj} \dots \bar{p}_{Nl} \dots \bar{p}_{Ni}}, \quad (1)$$

где число сумм в (1) равно n .

В соотношении (1) p_{Nj} , \bar{p}_{Nj} — вероятность выпадания и соответственно невыпадания хотя бы одной точки суммарного потока в j -й позиции линейной области Ω размером K элементов:

$$p_{Nj} = 1 - (1 - v_j)^N, \quad (2)$$

v_j — вероятность выпадания в j -й позиции области Ω хотя бы одной точки парциального потока.

Для одноточечного потока, т. е. потока, состоящего из последовательности одиночных случайных точек, при его равновероятном расположении на произвольной позиции $j = \overline{1, K}$ в области Ω $v_j = v = Q/K$, $p_{Nj} = p_N = 1 - (1 - Q/K)^N$. В этом случае функция правдоподобия (1) будет описываться биномиальным законом распределения вида

$$p(n/N) = C_K^n [1 - (1 - Q/K)^N]^n (1 - Q/K)^{N(K-n)}. \quad (3)$$

Решая уравнение максимального правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial N} p(n/N) /_{n=\langle n \rangle} = 0 \quad (4)$$

относительно N , из (3) и (4) получим

$$\hat{N} = \ln [1 - \langle n \rangle / K] / \ln [1 - Q/K], \quad (5)$$

где $\langle n \rangle$ — среднее по реализациям число n выпавших в области Ω точек от N потоков.

* В этом смысле рассматриваемая задача по своей постановке полностью совпадает с задачей размещения элементарных случайных частиц по ячейкам (см.: Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. — М.: Наука, 1976).

** Причем их число априорно не известно и подлежит оценке.

Так как при практически проводимых оценках нахождение \hat{N} осуществляется по выборочным значениям n , в (5) вместо $\langle n \rangle$ используется выборочное наблюдаемое значение n . В этом случае для повышения информативности оценки \hat{N} необходимо найти верхнюю $\hat{N}_в$ и нижнюю $\hat{N}_н$ границы доверительного интервала \hat{N} . Совокупность величин $\hat{N}_н$, \hat{N} , $\hat{N}_в$ позволяет судить о точности оценки \hat{N} , получаемой по данному выборочному значению n и фиксированному априорно известному K .

Полагая распределение $p(N)$ равномерным, для апостериорной плотности вероятности $p(N/n)$ в соответствии с соотношением Байеса можно записать

$$p(N/n) = \frac{p(n/N)}{\sum_{N=0}^{\infty} p(n/N)}. \quad (6)$$

В этом случае верхняя $\hat{N}_в$ и нижняя $\hat{N}_н$ границы доверительного интервала оценки \hat{N} находятся из соотношений

$$\varepsilon_в = \sum_{N=\hat{N}_в}^{\infty} \frac{p(n/N)}{\sum_{N=0}^{\infty} p(n/N)}; \quad \varepsilon_н = \sum_{N=0}^{\hat{N}_н} \frac{p(n/N)}{\sum_{N=0}^{\infty} p(n/N)}. \quad (76)$$

Здесь $1 - \varepsilon_в$ и $1 - \varepsilon_н$ — коэффициенты доверия для верхней $\hat{N}_в$ и нижней $\hat{N}_н$ границ доверительного интервала оценки \hat{N} . Очевидно, что $\varepsilon_н + \varepsilon_в + \varepsilon = 1$, где ε — надежность полученной интервальной оценки (коэффициент доверия).

Для аналитического решения уравнений (7) относительно величин интервальных оценок $\hat{N}_в$ и $\hat{N}_н$ заменим конечные суммы в (7) интегралами. Нетрудно видеть, что погрешность, обусловленная подобной заменой, достаточно мала по сравнению с $\varepsilon_в$ и $\varepsilon_н$ и ею можно пренебречь при практических расчетах. Так, для сумм в числителях уравнений (7) остаточный член в формуле суммирования Эйлера — Маклорена [3] для распределения вида (3) не превышает величины

$$\alpha_1 \cong \frac{p(n/N)/_{N=C}}{2} + \sum_{z=1}^h \frac{B_{2z}}{(2z)!} p^{2z-1}(n/N)/_{N=C} + \frac{CB_{2h+2}}{(2h+2)!} p^{2h+2}(n/N)/_{N=C}, \quad (8)$$

а для сумм в знаменателях (7) —

$$\alpha_2 \cong -(N_1/720) p^4(n/N)/_{N=C}, \quad (9)$$

где $p^L(\dots)/_{N=C}$ — L -я производная функции $p(n/N)$ в точке $N=C$;
 $C = \begin{cases} N_в & \text{для соотношения (7a),} \\ N_н & \text{для соотношения (7б);} \end{cases}$ B_L — числа Бернулли; $\Theta = 0 \div 1$;
 $N_1 \gg 1$ — параметр, при котором функция $p(n/N)/_{N=N_1}$ меньше наперед заданной, сколь угодно малой величины.

При достаточно малых $\varepsilon_н$ и $\varepsilon_в$, ограниченных для распределения вида (3) величиной $0,1 \div 0,15$, учитывая, что коэффициент эксцесса распределения $p(n/N)$ в большинстве практически интересных случаев ($K/n \geq 1,1 \div 1,3$ и $N > 2 \div 3$) мало отличается от нуля или даже несколько ниже его, а коэффициент асимметрии больше нуля, из (8) и (9) следует, что α_1 и α_2 примерно на порядок меньше величин $\varepsilon_н$ и $\varepsilon_в$.

Таким образом, с достаточной для большинства практических приложений степенью точности (7) можно представить в виде

$$1 - \varepsilon_в = \int_0^{\hat{N}_в} \frac{p(n/N)}{\int_0^{\infty} p(n/N) dN} dN; \quad \varepsilon_н = \int_0^{\hat{N}_н} \frac{p(n/N)}{\int_0^{\infty} p(n/N) dN} dN. \quad (10)$$

Подставляя (3) в (10); производя в последних соотношениях замену переменных $t = (1 - Q/K)^N$, а также учитывая, что $B(p, q) = B(q, p)$ ($B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$ — бета-функция), получим

$$\varepsilon_B = I_{S_B}(K-n, n+1), \quad (11a)$$

$$\varepsilon_H = 1 - I_{S_H}(K-n, n+1). \quad (11b)$$

В последних соотношениях $I_S(K-n, n+1) = B_S(K-n, n+1)/B(K-n, n+1)$ — отношение неполной бета-функции; $B_S(p, q) = \int_0^S t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$ — неполная бета-функция;

$$S_B = (1 - Q/K)^{N_B} < 1; \quad S_H = (1 - Q/K)^{N_H} < 1 \quad (12)$$

— функции, обратные неполной бета-функции.

Параметры S_B и S_H в соотношениях (11) можно представить в виде [5]

$$S = \mu_2 / (\mu_2 + \mu_1 F), \quad (13)$$

где μ_1 , μ_2 и F определяются выражением $I_S(\mu_2/2, \mu_1/2) = \Phi(F/\mu_1, \mu_2) = \rho$. В последнем соотношении $\rho = \varepsilon_B$ для соотношения (11a), $\rho = 1 - \varepsilon_H$ для соотношения (11b); $\mu_1 = 2(n+1)$, $\mu_2 = 2(K-n)$; F — верхняя ρ -процентная точка F -распределения с μ_1 и μ_2 степенями свободы; $\Phi(\dots)$ — соответствующая F -распределению функция распределения.

Параметры S_B и S_H в (11) могут быть выражены также и через параметры интеграла вероятности (см. [5]).

Подставляя (12) в (13) и используя (11), нетрудно получить оценку верхней \hat{N}_B и нижней \hat{N}_H границ доверительного интервала \hat{N} . Результаты проведенных с помощью [4, 5] расчетов представлены на рис. 2—4, на которых

$$\Delta_H = 1 - (\hat{N}_H/\hat{N}), \quad \Delta_B = (\hat{N}_B/\hat{N}) - 1, \quad \Delta = (\hat{N}_B - \hat{N}_H)/2\hat{N}. \quad (14)$$

При построении соответствующих зависимостей предполагалось, что $\varepsilon_B = \varepsilon_H = 0,05$.

Анализ показал, что относительные величины доверительных интервалов оценки \hat{N} числа N парциальных потоков не зависят от Q , а определяются только размером K линейной дискретной области Ω и числом n вышедших на ней точек от N потоков. Подобный вывод можно распространить и на случай, когда исходный поток представляет собой поток сгруппированных случайных точек с t точками в группе.

Факт независимости относительных величин доверительных интервалов оцен-

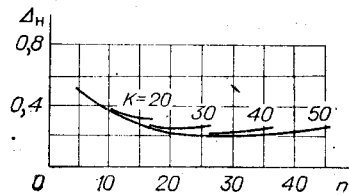


Рис. 2.

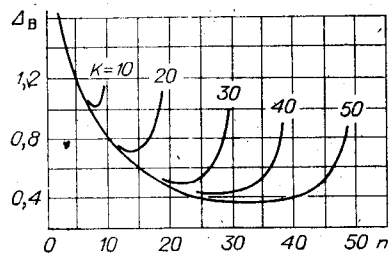


Рис. 3.

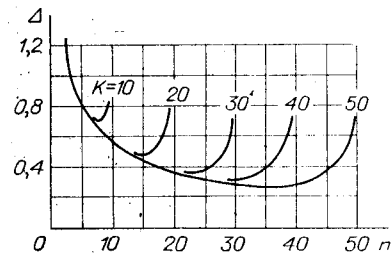


Рис. 4.

ки \hat{N} от Q следует, в частности, из соотношений (14) при подстановке в последние выражений (5), (12) и (13) (причем \hat{N}_v и \hat{N}_n находятся в результате логарифмирования (13) при подстановке (12)). Аналогичный вывод можно получить и из (5), полагая, что границам \hat{N}_v и \hat{N}_n адекватны некоторые граничные значения оценок n_v и n_n числа точек, зависящие, например, от выборочного наблюдаемого значения n , его дисперсии и априорно выбранной величины квантиля распределения $p(n/N)$.

Таким образом, из проведенного в статье анализа можно сделать важный для практических приложений вывод, заключающийся в том, что точность интервальной оценки числа N парциальных потоков по выборочным значениям n с использованием процедуры (5) составляет величину не хуже 30—40% при $K/n \geq 1,15-1,2$ и $K \geq 25-30$ при произвольных значениях Q .

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков И. А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума.— М.: Сов. радио, 1969.
2. Решин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем.— М.: Сов. радио, 1977.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1970.
4. Пирсон К. Таблицы неполной бета-функции: Пер. с англ./Под ред. Л. Н. Большаева.— М.: Наука, ВЦ АН СССР, 1974.
5. Справочник по специальным функциям: Пер. с англ./Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана.— М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 19 августа 1983 г.,
окончательный вариант — 23 февраля 1984 г.*

УДК 681.327.12

С. Л. ЕРМАКОВ, Б. Я. ЖЕВЕЛЕВ, В. А. РУДОЙ

(Минск)

УКАЗАТЕЛЬ ТИПА «КАРАНДАШ» В КООРДИНАТНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВАХ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

Быстрое развитие средств интерактивного взаимодействия человека и ЭВМ ставит ряд проблем в области цифровой обработки графических образов: чертежей, карт, фотоснимков и т. д. Одной из актуальных задач в рамках проблемы создания устройств графического ввода с координатно-измерительными средствами (КИС) повышенной точности является разработка и конструктивная реализация рабочего инструмента оператора (указателя), выполненного в форме карандаша [1, 2].

Большая часть распространенных в настоящее время КИС функционирует на основе измерения электромагнитного взаимодействия матрицы проводников планшета и подвижной цилиндрической катушки индуктивности указателя визирного типа [3, 4]. Применение такого принципа для реализации КИС с указателем типа «карандаш» нецелесообразно в связи со значительной аппаратной погрешностью, являющейся следствием резкого искажения амплитудно-пространственной характеристики (АПХ) из-за переменной ориентации оси катушки индуктивности [4].