

Таблица 2

k_1	k_2	z	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,2	0,4	0,6	0,8
1,00	1,00	$F(z)$	0,64	0,36	0,16	0,04	0,04	0,16	0,36	0,64
1,00	1,00	$\tilde{F}(z)$	0,64	0,36	0,16	0,04	0,04	0,16	0,36	0,64
1,07	0,93	$\tilde{F}(z)$	0,64	0,35	0,16	0,04	0,06	0,15	0,38	0,64

Значения оценок, соответствующие этим трем вариантам, представлены в третьей, четвертой и пятой строках табл. 1 соответственно.

Приведенные результаты показывают, что применение рассмотренного метода позволяет устранить существенные систематические погрешности, возникающие при аппроксимации неизвестной функции с помощью полинома даже достаточно высокой степени.

Пример 2. Пусть модель (2) имеет форму

$$y(t) = (z(t))^2 (k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)) + \varepsilon(t),$$

где $z = \sin(8\pi t/T)$; $x_1(t) = \sin(2\pi t/T)$; $x_2(t) = \sin(4\pi t/T)$;

$$T = 200; \quad k_1 = k_2 = 1; \quad 0 \leq t \leq 200,$$

а $\varepsilon(t)$ — белый шум с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

В качестве узловых были выбраны значения z_i , равные -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8, и определены значения t_i , являющиеся решениями системы уравнений $\sin(8\pi t/T) = z_i$, $i = 1, \dots, 8$. На основании входов и выхода модели, связанных с этими моментами времени, получены оценки параметров k_1 , k_2 и значений функции на выбранной сетке значений аргумента z при следующих условиях: $\sigma = 0$ и $\sigma = 0,03$.

Значения оценок, соответствующие этим двум вариантам, представлены в третьей и четвертой строках табл. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 15 июня 1984 г.

УДК 519.24 : 519.651

Б. М. ШУМИЛОВ

(Томск)

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНАМИ В ЗАДАЧЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ. II

Задача предварительной обработки информации состоит в фильтрации и сжатии результатов измерений исследуемых функциональных зависимостей с целью экономии памяти в устройствах хранения данных, повышения эффективности передачи сигналов и упрощения их дальнейшего анализа и интерпретации [1—3]. Один из подходов к сжатию данных связан с отысканием точек разрыва производных в экспериментальных зависимостях [4, 5]. В статье предлагается использовать для решения этой задачи локальную аппроксимацию, точную на сплайнах [6].

Будем считать, что экспериментальные значения $f(t_1)$, $f(t_2)$, ... $f(t_i)$, ... ($t_i < t_{i+1}$) представляют собой сумму полезного сигнала

$u(t_i)$ и шума $\xi(t_i)$, причем точки разрыва производной $u'(t)$, $r \geq 1$, попадают в некоторые из внутренних точек t_i . Положим $x_0 = t_1$, $x_1 = t_k$, где $k = 2 \vee 3$, $x_2 = t_{k+2}$, ..., $x_j = t_{k+2(j-1)}$, ... Добавим произвольные точки $x_{-r} < x_{1-r} < \dots < x_0$ и свяжем с полученной сеткой базисные B -сплайны $B_r^j(x)$, отличные от нуля лишь на отрезках (x_j, x_{j+r+1}) [7]. Определим функционалы

$$\lambda_j^l(f) = \sum_{n=l-r}^{l+m} \sum_{i=k+2(l-1)}^{k+2(l+m)} M_{jn}^l B_r^n(t_i) f(t_i),$$

$$j = l - r, \dots, l + m; \quad l \geq 0,$$

где M_{jn}^l суть элементы матрицы, обратной по отношению к матрице, составленной из элементов

$$\sum_{i=k+2(l-1)}^{k+2(l+m)} B_r^n(t_i) B_r^j(t_i), \quad j, n = l - r, \dots, l + m. \quad (1)$$

Имеет место следующая

Теорема. Пусть $k = 3$, $m \geq r - 2$. Тогда локальная аппроксимация вида

$$S_r(x) = \sum_{j \geq r} \lambda_j^{\max(0, j)}(f) B_r^{(j)}(x) \quad (2)$$

точна на сплайнах степени r дефекта 1 с расположением узлов в нечетных точках задания функции. При $m > r - 2$ она обладает свойством фильтрации случайной составляющей $\xi(t_i)$.

Для случая $k = 2$ при незначительном изменении $\lambda_j^0(f)$ формула (2) точна на сплайнах с узлами в четных точках t_2, t_4, \dots . При ограниченном справа интервале задания функции f формулы аппроксимации симметричны выражениям, полученным выше. Впрочем, в реальной ситуации обработка данных производится по мере их поступления с использованием аналоговой или микропроцессорной техники [8]. Вследствие этого имеет смысл упростить вычисления за счет отбрасывания крайних членов в формуле (2), несколько сужая при этом область аппроксимации по сравнению с интервалом измерения. Отметим, что коэффициенты $\lambda_j^0(f)$ взаимно независимы, что позволяет организовать их параллельное вычисление.

Для сплайнов низких степеней часть выкладок можно проделать аналитически. Например, справедливо

Следствие. Пусть $r = m = 1$. Тогда узловые значения локальной аппроксимации, точной на сплайнах первой степени с узлами в четных ($i = 4, 6, \dots$) или нечетных ($i = 3, 5, \dots$) точках, равны

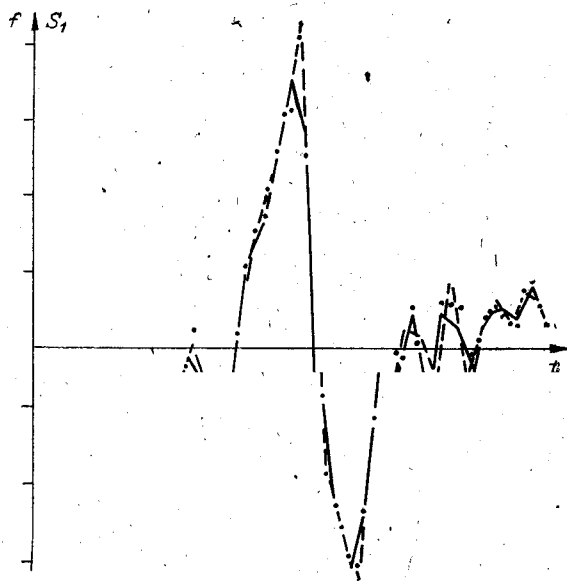
$$S_1(t_i) = \left(1 + \frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}^2 + (h_{i-2} + h_{i-1})^2} + \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2 + (h_i + h_{i+1})^2} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(f(t_i) + \frac{h_{i-2}((h_{i-2} + h_{i-1})f(t_{i-1}) - h_{i-1}f(t_{i-2}))}{h_{i-1}^2 + (h_{i-2} + h_{i-1})^2} + \right. \quad (3)$$

$$\left. + \frac{h_{i+1}((h_i + h_{i+1})f(t_{i+1}) - h_i f(t_{i+2}))}{h_i^2 + (h_i + h_{i+1})^2} \right), \quad h_i = t_{i+1} - t_i.$$

При этом значения $S_1(t_i)$ являются оценками для величин $u(t_i)$.

Обозначим через $L_i(x)$ отрезок прямой, соединяющий вершины $S_1(t_{i-1})$ и $S_1(t_{i+1})$, и предположим, что на рассматриваемом участке $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ сигнал $u(t)$ — линейная функция t . Тогда величина $\sigma_i = u(t_i) - L_i(t_i)$ представляет собой выборочное стандартное отклонение, а для p таких участков значение $\sigma^2(p) = \frac{1}{p-1} \sum_i \sigma_i^2$ служит оценкой дисперсии шума $\xi(t)$. С другой стороны, дисперсию можно оценить по из-



мерениям в некоторых других q точках с помощью соотношения $\sigma^2(q) = \frac{1}{q-1} \times \sum_i (f(t_i) - S_1(t_i))^2$. Следовательно, выражение $F(p-1, q-1) = \sigma^2(p)/\sigma^2(q)$ можно использовать в качестве статистики, по величине которой принимается решение о том, значимо ли данные $f(t_i)$ расходятся с дисперсией полученная статистика существенно отличается от ожидаемой согласно распределению Фишера при заданном уровне значимости, то в рассматриваемой области изменения аргумента t присутствуют явные не-

линейности, характеризующиеся изломами в соответствующих точках t_i . На практике удобный критерий обнаружения излома дает вычисление расстояния от вершины $S_1(t_i)$ до $L_i(x)$:

$$d_i = \frac{|(S_1(t_{i-1}) - S_1(t_{i+1}))h_{i-1} - (S_1(t_{i-1}) - S_1(t_i))(h_{i-1} + h_i)|}{((S_1(t_{i+1}) - S_1(t_{i-1}))^2 + (h_{i-1} + h_i)^2)^{1/2}},$$

если перпендикуляр к прямой пересекает отрезок [9, с. 62], и

$$d_i = \min [((S_1(t_{i+1}) - S_1(t_i))^2 + h_i^2)^{1/2}, ((S_1(t_{i-1}) - S_1(t_i))^2 + h_{i-1}^2)^{1/2}]$$

в противном случае. Это соответствует теоретическому выводу о том, что в окрестности точек разрыва производной, порядок которой равен степени сплайна, локальная аппроксимация, точная на сплайнах с узлом в точке разрыва, отличается от аппроксимации, не имеющей там узла, по существу совпадая с ней вне этой окрестности [6].

На рисунке представлены результаты вычислений по формуле (3) для функции $f(t_i)$, изображенной точками. Сплошная линия соответствует аппроксимирующему сплайну с узлами в нечетных точках, штриховая — в четных. Полученные значения d_i равны (слева направо)

0.84, 0.89, **4.96**, 0.75, 0.35, **16.89**, 0.01, 0.24, **6.79**, 0.22, 0.31, **5.52**, 2.36, 2.36, 0.65, 0.02, 0.08, 0.48, **7.07**, 0.34, 0.06, 0.12, **16.17**, 0.32, 0.08, **0.33**, 0.22, **0.25**, 0.11, 0.29, **0.34**, 0.04, **33.73**, 0.38, 0.18, **0.41**, 0.36, 0.23, 0.22, 0.47, **8.20**, 0.36, 0.03, 0.18, **0.30**, 0.09, 0.17, **15.32**, 0.38, **14.46**, 0.52, 0.31, **24.02**, 0.10, **7.64**, 0.58, 0.53, 0.12, **2.76**, 0.52, **2.76**, 0.76, 0.42, **8.06**, 0.29.

Здесь выделены локальные максимумы d_i . Применение к отмеченным точкам по мере роста d_i статистического критерия дает пороговое значение 8.20, начиная с которого локальным максимумам d_i соответствуют видимые точки излома исходной зависимости.

Доказательство теоремы. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\sum_{i=k+2(l-1)}^{k+2(l+m)} \left(f(t_i) - \sum_{j=l-r}^{l+m} \alpha_j B_r^j(t_i) \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha_j} \quad (4)$$

Очевидно, что при $m \leq r-2$ ее решением является интерполяционный сплайн степени r дефекта 1 с узлами в точках $t_{k+2l}, t_{k+2(l+1)}, \dots, t_{k+2(l+m-1)}$, причем при $m = r-2$ он единствен, так как выполнено условие перемежаемости узлов сплайна и точек интерполяции [7, с. 27]. Для случая $m > r-2$ возникает задача приближения в смысле наименьших квадратов, решение которой обладает фильтрующими свойствами по отношению к случайной составляющей $\xi(t_i)$ и дается в виде $\alpha_j = \lambda_j^l(f)$. Матрица (1) не вырождена, поскольку представляет собой произведение матриц, имеющих ранг $m+r+1$ (столько строк остается в невырожденной матрице интерполяционной задачи, получающейся из матрицы $[B_r^j(t_i)]$ выбрасыванием лишних строк).

Теперь в силу того, что сплайны $B_r^l(x)$ отличны от нуля лишь на отрезках (x_l, x_{l+r+1}) , при любых $l \geq -r$ имеем $\lambda_j^{\max(0,j)}(B_r^l) = 0$ для $j \geq l+r+1$, а при $l \geq m+1$ — и для $j \leq l-m+1$. Кроме того, учитывая, что величины

$$\sum_{i=k+2(\max(0,j)-1)}^{k+2(\max(0,j)+m)} B_r^n(t_i) B_r^p(t_i)$$

суть элементы матрицы, обратной к матрице

$$[M_{pn}^{\max(0,j)}] (p, n = \max(0, j) - r, \dots, \max(0, j) + m),$$

$$\begin{aligned} \text{находим } \lambda_j^{\max(0,j)}(B_r^l) &= \sum_{n=\max(0,j)-r}^{\max(0,j)+m} \sum_{i=k+2(\max(0,j)-1)}^{k+2(\max(0,j)+m)} M_{jn}^{\max(0,j)} B_r^n(t_i) B_r^l(t_i) = \\ &= \delta_j^l, \quad \begin{array}{l} j = l-m, \dots, l+r; \quad l \geq m+1, \\ j = -r, \dots, l+r; \quad l \leq m. \end{array} \end{aligned}$$

Здесь δ_j^l — символ Кронекера.

Таким образом, выполнено условие леммы де Бора-Фикса [6], и, следовательно, формула (2) точна на сплайнах степени r дефекта 1 с узлами в нечетных точках t_3, t_5, \dots .

Для четного случая ($k=2$) в проведенные рассуждения нужно ввести изменение, которое состоит в том, что при $l=0$ вместо (4) рассматривается экстремальная задача

$$\sum_{i=1}^{2m+2} \left(f(t_i) - \sum_{j=-r}^m \alpha_j B_r^j(t_i) \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha_j}$$

Аналогично задача приближения в смысле наименьших квадратов возникает при $m > r-1$, и решение ее имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \lambda_j^0(f) = \sum_{n=-r}^m \sum_{i=1}^{2m+2} M_{jn}^0 B_r^n(t_i) f(t_i), \\ & j = r, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь M_{jn}^0 — элементы матрицы, обратной к

$$\left[\sum_{i=1}^{2m+2} B_r^n(t_i) B_r^j(t_i) \right] \quad (j, n = -r, \dots, m).$$

С внесенным при $j \leq 0$ изменением точно так же доказывается, что формула (2) для случая $k=2$ является точной на сплайнах степени r дефекта 1 с узлами в точках t_2, t_4, \dots

Доказательство следствия. При $r = m = 1$ приходится решать следующую экстремальную задачу:

$$\begin{aligned} & (f(t_{i-2}) - S_1(t_{i-2}))^2 + (f(t_i) - S_1(t_i))^2 + \\ & + \left(f(t_{i-1}) - \frac{h_{i-1}S_1(t_{i-2}) + h_{i-2}S_1(t_i)}{h_{i-2} + h_{i-1}} \right)^2 + \left(f(t_{i+1}) - \frac{h_{i+1}S_1(t_i) + h_i S_1(t_{i+2})}{h_i + h_{i+1}} \right)^2 + \\ & + (f(t_{i+2}) - S_1(t_{i+2}))^2 \rightarrow \min_{S_1(t_{i-2}), S_1(t_i), S_1(t_{i+2})} \end{aligned}$$

Из необходимых условий экстремума находим систему уравнений для отыскания $S_1(t_{i-2})$, $S_1(t_i)$, $S_1(t_{i+2})$, разрешая которую относительно $S_1(t_i)$, получаем формулу (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумилов Б. М. Применение локальной аппроксимации сплайнами в задаче предварительной обработки информации.— В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 93). Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982, с. 66—72.
2. Шакин В. В. Вычислительная электрокардиография.— М.: Наука, 1981.
3. Архипов А. Е. Об одном методе кусочно-полиномиальной аппроксимации.— Вестн. Киев. политехн. ин-та. Техн. кибернетика, 1980, № 4, с. 22—26.
4. Бреев И. М. Алгоритм поиска точек излома в экспериментальных зависимостях при автоматизированной обработке данных.— В кн.: Системы и методы автоматизации научных исследований. М.: Наука, 1981, с. 96—98.
5. Валужие В. А. К., Парчяускас Г. А. Программный комплекс для анализа поликардиограмм.— В кн.: Теория и практика автоматизации электрокардиологических исследований (Материалы симпозиума, сент. 1981). Каунас: Мин. здрав. ЛитССР, 1981, с. 84—91.
6. Шумилов Б. М. Локальная аппроксимация сплайнами: формулы, точные на сплайнах.— Новосибирск, 1981 (Препринт АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ). Семинар «Методы вычислительной и прикладной математики»/Под руководством Г. И. Марчука—N 86.
7. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.
8. Михотин В. Д., Чувькин Б. В. Использование сплайнов для восстановления дискретизированных сигналов.— Измерение, контроль, автоматизация, 1982, № 3(43), с. 17—24.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Арамановича.— М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 15 сентября 1983 г.;
окончательный вариант — 19 марта 1984 г.

УДК 519.24 : 621.391.14

В. В. КУРИЛКИН
(Люберцы Московской)

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ПАРЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕК

В некоторых разделах статистической теории принятия решений часто ставится задача определения параметров ансамбля случайных потоков, характеризующих те или иные физические процессы, например потоков заряженных частиц в ядерной физике, радиоастрономии и т. д. [1]. В этом случае определенному физическому процессу ставится в соответствие поток случайных точек, характеристики которого полностью (или с достаточной степенью точности аппроксимации) описывают поведение анализируемого процесса.

В предлагаемой статье решается одна из задач подобного рода — оценка числа парциальных одноточечных потоков случайных точек с