ВЫВОДЫ

Экспериментальные исследования ошибок совмещения изображений в условиях окрашенного шума позволяют принять гипотезу [1] об адекватности их корреляционного описания, представленного формулами (3), (9).

При исследовании корреляционных функций производных яркости изображения по одному из параметров λ_i можно использовать как симметричные, так и несимметричные разности типа (5), (6). Качественный ход зависимостей при этом одинаков (сравните α_{11} и β_{11} на рис. 1), но нужно иметь в виду, что симметричные разности будут обладать меньшими дисперсиями и большими радиусами корреляции, чем несимметричные. Это следует из (7), (8) и рис. 1 и объясняется тем, что при симметричном оценивании производных сравниваются яркости в точках, отстоящих друг от друга на расстояниях, вдвое больших, чем при несимметричном. Это приводит к потере информации о высокочастотных составляющих пространственного спектра яркостей.

При анализе взаимных корреляций производных по разным параметрам целесообразно использовать только симметричные разности, так как в противном случае можно получить даже качественно неверные выводы (сравните α_{12} и β_{12} на рис. 2).

Если внешние размеры изображения значительно больше радиусов корреляции яркостей, можно считать, что все элементы матрицы (2) функционально связаны с (4) формулами (9). Это следует из сравнения (9) с экспериментальными данными и, в частности, иллюстрируется рис. 3.

С увеличением размеров изображения матрица (2) за исключением блока (4) стремится к диагональному виду.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буймов А. Г., Антипин В. В.** Ошибки МНК-совмещения изображений в условиях неоднородного окрашенного шума.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. конф. «Теория адаптивных систем и ее применения». М.— Л.: Научн. совет по компл. проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1983, с. 196.
2. **Буймов А. Г.** К статистике пальмовских полей.— Автометрия, 1981, № 6, с. 13.
3. **Антипин В. В., Буймов А. Г.** Быстрая имитация случайных изображений в базисе Адамара.— В кн.: Тез. докл. I Всесоюз. конф. «Методы и средства преобразования сигналов». Рига: Зинатне, 1978, т. 1, с. 105.
4. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979, с. 272.
5. **Решетников М. Т.** Применение моделей случайных полей при исследовании цифровых КЭС.— В кн.: Корреляционно- экстремальные системы обработки информации и управления. Томск: ТГУ, 1980, вып. 5, с. 40.

Поступила в редакцию 22 октября 1983 г.

УДК 519.24

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ НЕИЗВЕСТНУЮ ФУНКЦИЮ

Введение. Наиболее распространенной моделью, с помощью которой обычно описывается наблюдаемая в эксперименте функция нескольких переменных, является модель линейной регрессии, в которой среднее значение функции представляется в виде линейной комбинации значений аргументов. Идентификация такой модели сводится к получению оценок коэффициентов линейной комбинации с помощью метода наименьших квадратов [1].

Однако в ряде практических задач предположение о линейности функции по отношению ко всем аргументам не соответствует характеру изучаемой зависимости, так что модель линейной регрессии — слишком грубое приближение. В этом случае более адекватными экспериментальным данным могут оказаться модели, содержащие линейную функцию нескольких аргументов и некоторую нелинейную функцию одного аргумента. Ниже рассматриваются две модели, получающиеся при объединении выходов линейной модели и нелинейной функции с помощью операций сложения и умножения.

Обычным приемом, используемым при идентификации моделей, включающих неизвестную функцию, является приближенная замена этой функции полиномом некоторой степени с неизвестными коэффициентами [1]. При этом исходная модель с неизвестной функцией приближенно заменяется некоторой линейной моделью с подлежащими определению параметрами. В случае аддитивного объединения выходов такими параметрами будут коэффициенты линейной части и полинома, а в случае мультипликативного объединения — всевозможные их попарные произведения.

Такой способ параметризации неизвестной функции обладает рядом недостатков. При отсутствии априорной информации о характере функций выбор степени полинома осуществляется путем последовательного просчета ряда вариантов и проверки гипотез о значимости отличия от нуля отдельных членов [1]. При этом неправильный (в силу статистического характера процедуры) выбор формы аппроксимирующего полинома может привести к качественным искажениям характера идентифицируемой функции и появлению смещения в оценках коэффициентов линейной части. Кроме того, в случае мультипликативной модели для получения оценок приходится решать систему линейных уравнений большой размерности, так как число неизвестных параметров равно произведению размерности линейной части на число членов полинома.

С практической точки зрения более удобной и не содержащей методической погрешности формой параметризации неизвестной функции является представление ее с помощью вектора значений, соответствующих некоторой сетке значений аргумента. Ниже рассматривается нередко встречающийся на практике случай, когда в ходе эксперимента величины входов и выхода модели наблюдаются непрерывно или настолько часто, что возможна достаточно точная интерполяция их промежуточных значений. В данной работе ставится задача получения оценок коэффициентов линейной части и вектора значений неизвестной функции и показывается возможность ее решения с помощью методов линейной алгебры.

Суть предлагаемых методов сводится к следующему. Для аддитивной модели условие непрерывного наблюдения за аргументом неизвестной функции позволяет сразу записать систему уравнений, линейных относительно коэффициентов линейной части и значений неизвестной функции в узлах сетки. При этом (в отличие от случая полиномиальной параметризации) оценки всех неизвестных по методу наименьших квадратов будут несмещенными.

Для мультипликативной модели возможность непрерывного наблюдения за аргументами позволяет составить несколько (по числу узлов сетки) линейных систем, каждая из которых включает в качестве вектора неизвестных произведение вектора коэффициентов линейной части на значение неизвестной функции в одном из узлов сетки. Оценки для этих произведений находятся методом наименьших квадратов. Для получения оценок параметров линейной части и вектора значений неизвестной функции используется коллинеарность средних значений оценок этих произведений. Это свойство дает возможность свести задачу оценивания вектора значений неизвестной функции к задаче нахождения собственного вектора симметрической матрицы, соответствующего ее наименьшему собственному числу. Получаемая оценка лишена систематической погрешности, связанной с параметризацией функции. Ее статистические свойства в работе не анализируются. Эффективность разработанных методов подтверждается модельными примерами.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим две модели:

$$E[y(t)] = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{a} + f(z(t)), \tag{1}$$

$$E[y(t)] = f(z(t))\,(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{a}), \tag{2}$$

где $\mathbf{x}^T(t) = |x_1(t), \ldots, x_m(t)|$, $z(t)$, $\{x_i(t)\}_1^m$ — непрерывные функции параметра $t \in [0, T]$, $\mathbf{a}$ — m-мерный вектор неизвестных параметров, $f(z)$ — неизвестная однозначная функция.

Зададим некоторую, не обязательно равномерную сетку значений аргумента z $(z_1 < \ldots < z_n)$ таким образом, чтобы каждое из уравнений

$$z(t) = z_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

имело, по крайней мере, одно решение. Предположим, что множество всех решений уравнения (3) состоит только из изолированных точек $\{t_k\}_1^N \in [0, T]$. В отношении случайной составляющей будем считать, что все значения $\{y(t_k)\}_1^N$ статистически независимы и имеют одинаковую дисперсию.

Требуется получить оценки вектора неизвестных параметров $\mathbf{a}$ и вектора $\boldsymbol{\varphi} = |f(z_1), \ldots, f(z_n)|^T$. Введем для элементов множества $\{t_k\}_1^N$ двухиндексные обозначения t_{ij}, где первый индекс соответствует порядковому номеру того уравнения в системе (3), решением которого является значение t_{ij}, а второй — его порядковому номеру среди подмножества t_{ij}, $j = 1, \ldots, n(i)$, корней этого уравнения.

Рассмотрим следующие объекты:

$$\mathbf{y} = |y(t_1), \ldots, y(t_N)|^T, \quad \underset{N\times m}{\mathbf{x}} = \begin{Vmatrix} \mathbf{x}^T(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t_N) \end{Vmatrix},$$

$$\underset{n\times N}{\mathbf{M}} = \begin{Vmatrix} \underbrace{1 \ldots 1}_{n(1)} & 0 \ldots & & \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & \underbrace{1 \ldots 1}_{n(2)} & 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ldots & & \ldots 0 & \overbrace{1 \ldots 1}^{n(n)} \end{Vmatrix}.$$

В этих обозначениях система уравнений, связывающая входы и выход модели (1) при значениях параметра $t = t_k$, $k = 1, \ldots, N$, запишется в виде

$$E[\mathbf{y}] = \begin{Vmatrix} \mathbf{x} \,\vdots\, \mathbf{M}^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Следовательно, для модели (1) поставленная задача сводится к задаче оценивания вектора $|\mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi}|^T$ неизвестных параметров в модели линейной регрессии (4) при стандартном условии $D[\mathbf{y}] = \sigma^2 I$.

Если $N \geq m + n$ и $\operatorname{rank}\|\mathbf{x} \,\vdots\, \mathbf{M}^T\| = m + n$, то применение метода наименьших квадратов позволяет получить несмещенные оценки искомых векторов $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\varphi}$.

Теперь перейдем к рассмотрению модели (2) и покажем, что и для нее оценки неизвестных векторов $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ могут быть получены с помощью методов линейной алгебры. Введем следующие дополнительные условия:

$$\begin{aligned} &n(i) \geq m, \\ &f(z_i) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &f(z_j) = f_0, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \tag{5}$$

и обозначения:

$$\mathbf{y}_i = |\, y(t_{i1}), \ldots, y(t_{in(i)}) \,|^T,$$

$$\underset{n(i)\times m}{\mathbf{x}_i} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{x}^T(t_{i1}) \\ \mathbf{x}^T(t_{in(i)}) \end{matrix} \right\|, \; i = 1, \ldots, n.$$

В этих обозначениях система уравнений, связывающая входы и выход модели (2) при $t = t_k$, $k = 1, \ldots, N$, запишется в виде

$$E[\mathbf{y}_i] = \mathbf{x}_i \mathbf{a}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{a}_i = f(z_i)\,\mathbf{a}. \tag{7}$$

Следовательно, несмещенные оценки $\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}_1^n$ векторов $\{\mathbf{a}_i\}_1^n$ могут быть определены методом наименьших квадратов. Для получения оценок неизвестных векторов **a** и **φ** воспользуемся методом, дающим решение системы нелинейных уравнений вида (7) при заданных $\{\mathbf{a}_i\}_1^n$ относительно неизвестных $\{f(z_i)\}_1^n$ и вектора **a**. Для нахождения этого решения поступим следующим образом. Рассмотрим являющуюся следствием (7) систему вида

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i / f(z_i) \right) - \mathbf{a}_j / f(z_j) = 0; \; j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\underset{n\times n}{\mathbf{S}} = \left\| \begin{array}{c:c:c:c} (1-n)/n & 1/n & & 1/n \\ 1/n & (1-n)/n & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1/n \\ 1/n & 1/n & & (1-n)/n \end{array} \right\|;$$

$$\mathbf{b} = |\, b_1, \ldots, b_n \,|^T; \quad b_i = 1/f(z_i), \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{S} \otimes \mathbf{a})\,\mathrm{diag}\,\{f(z_1), \ldots, f(z_n)\}.$$

В этих обозначениях система (8) запишется в виде $\mathbf{A}\mathbf{b} = 0$.

Покажем, что $\mathrm{rank}\,\mathbf{A} = n - 1$. Так как в силу условия (5) диагональная матрица с элементами $\{f(z_i)\}_1^n$ имеет полный ранг, а $\mathrm{rank}\,\mathbf{a} = 1$, то в силу свойства ранга прямого произведения [2]

$$\mathrm{rank}\,\mathbf{A} = \mathrm{rank}\,\mathbf{S}.$$

Таким образом, необходимо установить, что $\mathrm{rank}\,\mathbf{S} = n - 1$. Последовательно отнимая последнюю строку матрицы **S** от всех предыдущих, преобразуем ее к виду

$$\mathbf{S}^* = \left\| \begin{array}{c:c:c:c:c} -1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & -1 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & 0 & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & & -1 & 1 \\ 1/n & 1/n & & 1/n & (1-n)/n \end{array} \right\|.$$

Из линейной независимости первых $(n-1)$ строк этой матрицы следует, что $\mathrm{rank}\,\mathbf{S}^* = \mathrm{rank}\,\mathbf{S} \geqslant n - 1$, а так как сумма всех ее столбцов является нулевым вектором, то, очевидно, что $\mathrm{rank}\,\mathbf{S} = n - 1$. Следовательно, общее решение однородной системы (8) может быть записано в виде

$$\mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{h}\lambda,$$

где $\mathbf{h}$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, соответствующий ее единственному нулевому собственному числу, а λ — произвольный параметр.

Теперь воспользуемся этим методом для оценивания неизвестного вектора $\mathbf{a}$ на основании найденных оценок $\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}_1^n$. Заменив в матрице A

$$\| \; 1/n\mathbf{a}_1 \; \vdots \; 1/n\mathbf{a}_2 \; \vdots \; \vdots (1-n)/n\mathbf{a}_n \|$$

Так как в общем случае за счет случайных флуктуаций компоненты векторов $\{\tilde{\mathbf{a}}_i\}_1^n$ не совпадают со своими средними значениями, так что матрица $\tilde{A}$ в отличие от матрицы A уже не будет иметь дефекта ранга, то выберем в качестве оценки неизвестного вектора $\mathbf{b}$ собственный вектор $\tilde{\mathbf{h}}$ матрицы $\tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{A}}$, соответствующий ее наименьшему собственному числу. Тогда однопараметрическое семейство оценок вектора $\mathbf{b}$ запишется в виде $\tilde{\mathbf{b}}(\lambda) = \tilde{\mathbf{h}}\lambda$. Для определения значения свободного параметра λ воспользуемся ограничением, наложенным на j-е значение функции $f(z_i)$ условиями (5). В силу (5) $1/f_0 = \tilde{\mathbf{h}}(j)\lambda$, откуда, разрешая это уравнение относительно λ, получим $\lambda_0 = 1/(f_0\tilde{\mathbf{h}}(j))$. Окончательно для оценок компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ будем иметь выражения

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(i) = 1/(\tilde{\mathbf{h}}(i)\lambda_0),$$

$$\tilde{\mathbf{a}}(i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{a}}_j(i)\,\tilde{\mathbf{h}}(i)\,\lambda_0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Примеры. Для иллюстрации эффективности рассмотренных методов идентификации параметров и значений неизвестной функции в моделях (1), (2) рассмотрим два модельных примера.

Пример 1. Пусть модель (1) имеет следующую форму:

$$y(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t) + F(z(t)) + \varepsilon(t),$$

где $x_1(t) = \sin(2\pi t/T)$; $x_2(t) = \sin(2\pi t/T + 1{,}6)$;

$z(t) = \sin(4\pi t/T)$; $T = 200$; $k_1 = k_2 = 1$; $0 \leqslant t \leqslant 200$;

$\varepsilon(t)$ — белый шум с нулевым средним и дисперсией σ^2, а значения функции $F(z)$ даны во второй строке табл. 1.

Приведенные в таблице значения аргумента z были выбраны в качестве узловых, и по ним найдены значения t_{ij}, являющиеся решениями системы уравнений $\sin(4\pi t/T) = z_i$, $i = 1, \ldots, 9$. На основании значений входов и выхода модели, соответствующих этим моментам времени, были получены оценки параметров k_1, k_2 и значений функции $F(z)$ на выбранной сетке значений z при следующих условиях:

1) функция $F(z)$ аппроксимировалась полиномом пятой степени при $\sigma = 0$;

2) значения $F(z)$ определялись описанным выше методом при значениях $\sigma = 0$ и $\sigma = 0{,}03$.

Таблица 1

k_1	k_2	z	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
		$F(z)$	0,6	0,4	0,2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1
1,00	1,00	$\tilde{F}(z)$	0,615	0,368	0,176	0,081	0,065	0,165	0,258	0,271	0,076
0,999	0,999	$\tilde{F}(z)$	0,600	0,400	0,200	0,000	0,100	0,200	0,300	0,200	0,100
0,993	1,00	$\tilde{F}(z)$	0,590	0,397	0,187	0,012	0,093	0,208	0,266	0,187	0,115

Таблица 2

k_1	k_2	z	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0,2	0,4	0,6	0,8
1,00	1,00	$F(z)$	0,64	0,36	0,16	0,04	0,04	0,16	0,36	0,64
1,00	1,00	$\tilde{F}(z)$	0,64	0,36	0,16	0,04	0,04	0,16	0,36	0,64
1,07	0,93	$\tilde{F}(z)$	0,64	0,35	0,16	0,04	0,06	0,15	0,38	0,64

Значения оценок, соответствующие этим трем вариантам, представлены в третьей, четвертой и пятой строках табл. 1 соответственно.

Приведенные результаты показывают, что применение рассмотренного метода позволяет устранить существенные систематические погрешности, возникающие при аппроксимации неизвестной функции с помощью полинома даже достаточно высокой степени.

Пример 2. Пусть модель (2) имеет форму

$$y(t)=(z(t))^2(k_1x_1(t)+k_2x_2(t))+\varepsilon(t),$$

где $z=\sin(8\pi t/T)$; $x_1(t)=\sin(2\pi t/T)$; $x_2(t)=\sin(4\pi t/T)$;

$$T=200;\quad k_1=k_2=1;\quad 0\leqslant t\leqslant 200,$$

а $\varepsilon(t)$ — белый шум с нулевым средним и дисперсией σ^2.

В качестве узловых были выбраны значения z_i, равные −0,8; −0,6; −0,4; −0,2; 0,2; 0,4; 0,6; 08, и определены значения t_{ij}, являющиеся решениями системы уравнений $\sin(8\pi t/T)=z_i$, $i=1, \ldots, 8$. На основании входов и выхода модели, связанных с этими моментами времени, получены оценки параметров k_1, k_2 и значений функции на выбранной сетке значений аргумента z при следующих условиях: $\sigma=0$ и $\sigma=0{,}03$.

Значения оценок, соответствующие этим двум вариантам, представлены в третьей и четвертой строках табл. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 15 июня 1984 г.

УДК 519.24 : 519.651

Б. М. ШУМИЛОВ

(Томск)

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНАМИ В ЗАДАЧЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ. II

Задача предварительной обработки информации состоит в фильтрации и сжатии результатов измерений исследуемых функциональных зависимостей с целью экономии памяти в устройствах хранения данных, повышения эффективности передачи сигналов и упрощения их дальнейшего анализа и интерпретации [1—3]. Один из подходов к сжатию данных связан с отысканием точек разрыва производных в экспериментальных зависимостях [4, 5]. В статье предлагается использовать для решения этой задачи локальную аппроксимацию, точную на сплайнах [6].

Будем считать, что экспериментальные значения $f(t_1)$, $f(t_2)$, ..., $f(t_i)$, ... $(t_i<t_{i+1})$ представляют собой сумму полезного сигнала