УДК 535.518.8 : 539.2

Э. Э. КЛОТИНЬШ, Ю. Я. КОТЛЕРИС

(Рига)

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА ЗА ХАОТИЧЕСКИ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЯЮЩИМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

Определение состояния поляризации света является наиболее типичной задачей при создании поляризационно-оптических устройств и исследовании применяемых для этого материалов. В связи с широким распространением электрооптической сегнетокерамики цирконата — титаната свинца с примесью лантана (ЦТСЛ) и других поликристаллических материалов [1] особый интерес представляет решение такой задачи для тонкой, прозрачной, макроскопически однородной пластины из поликристаллического материала. Аналогичная задача о распространении скалярных волн через слой случайно-неоднородной среды рассматривалась неоднократно [2—6] в рамках модели хаотического фазового экрана. Такой подход позволяет устранить математические трудности, возникающие при решении волнового уравнения для пространственной области конечных размеров. Однако, применяя модель хаотического фазового экрана к поликристаллическим сегнетоэлектрическим материалам, необходимо учитывать присущее им двулучепреломление света.

Задача настоящей работы — исследование влияния хаотического двулучепреломления на статистические характеристики поляризации монохроматической волны за фазовым экраном. При этом структура поликристаллического материала описывается статистическими распределениями разности фаз нормальных колебаний и ориентаций оптических осей элементов фазового экрана.

Показано, что используемая модель объясняет взаимосвязь деполяризации с состоянием поляризации падающего света, присущую электроуправляемым фазовым пластинам из ЦТСЛ.

Расчет проводится для оптической системы, в плоскости ρ которой установлены фазовый экран и линза радиусом a с фокусным расстоянием F. Матрица поляризации

$$I_{il}(\rho_F)\,\langle u_i(\rho_F)\,u_l^*(\rho_F)\rangle \tag{1}$$

отыскивается в плоскости ρ_F. Действие фазового экрана на падающую плоскую волну определяется линейным унитарным преобразованием для спектральных амплитуд:

$$u_i(\rho)=a_{ik}(\rho)u_k. \tag{2}$$

Требование статистической однородности и эргодичности фазового экрана накладывает на элементы матрицы a_{ik} следующие условия:

$$\langle a_{ik}(\rho)\rangle=\mathrm{const}, \tag{3}$$

$$\langle a_{ik}(\rho)\,a_{lm}^*(\rho')\rangle\equiv K_{iklm}(\rho-\rho'). \tag{4}$$

Тогда матрица поляризации I_{il} в плоскости ρ_F имеет вид

$$I_{il}=\frac{k^2u_ku_m^*}{4\pi^2F^2}\iint K_{iklm}(\rho-\rho')\exp\left[-i\,\frac{k\rho_F(\rho-\rho')}{F}\right]d\rho d\rho', \tag{5}$$

где $k=\omega/c$ — волновое число, F — фокусное расстояние линзы, $\mathbf{u}_k$ — вектор спектральной амплитуды падающей плоской волны. Интегрирование в выражении (5) проводится по площади Ω круглой апертуры радиусом a.

Корреляционная функция (4) может быть найдена с учетом статистических свойств фазового экрана, адекватных реальной пластине. Для этого функция a_{ik} представляется в виде суммы регулярной и флуктуирующей частей:

$$a_{ik}(\rho) = \langle a_{ik}(\rho)\rangle + \tilde{a}_{ik}(\rho) \equiv \langle a_{ik}\rangle + \tilde{a}_{ik}(\rho). \qquad (6)$$

Подставив (6) в (4) и (5), получим выражение для матрицы поляризации в виде суммы двух интегралов:

$$I_{il} = \frac{k^2 u_k u_m^*}{4\pi^2 F^2}\left\{\langle a_{ik}\rangle\langle a_{lm}\rangle^* \int_\Omega\int_\Omega \exp\left[-i\frac{k\rho_F(\rho-\rho')}{F}\right]d\rho d\rho' + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega\int_\Omega \langle\tilde{a}_{ik}(\rho)\tilde{a}_{lm}^*(\rho')\rangle \exp\left[-i\frac{k\rho_F(\rho-\rho')}{F}\right]d\rho\, d\rho'\right\}.$$

Путем интегрирования по переменной ρ' найдем, что

$$I_{il}(\rho_F) = \frac{k^2 u_k u_m^*}{4\pi^2 F^2}\left\{\langle a_{ik}\rangle\langle a_{lm}\rangle^* \left|\int_\Omega \exp - i\frac{k\rho_F\rho}{F}d\rho\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega \langle\tilde{a}_{ik}(\mathbf{R}+\rho)\tilde{a}_{lm}^*(\mathbf{R})\rangle \exp\left[-i\frac{k\rho_F\rho}{F}\right]d\rho\right\}. \qquad (7)$$

Первое из слагаемых соответствует распределению интенсивности света при дифракции на апертуре размером $2a$, второе — вкладу неоднородностей фазового экрана. По мере увеличения $|\rho|$ функция $\langle\tilde{a}_{ik}\tilde{a}_{lm}^*\rangle(\rho)$ стремится к нулю. Характерный радиус области, в которой эта функция отлична от нуля, гораздо меньше линейных размеров апертуры, поэтому интегрирование по апертуре в (7) можно заменить интегралом по всей плоскости.

Для оценки вклада хаотического двулучепреломления предлагается использовать модель статистически однородного фазового экрана в виде мозаики, каждый элемент которой характеризуется двумя статистически независимыми параметрами: разностью фаз нормальных колебаний δ и направлением оптической оси $\mathbf{n}$. Значения параметров отдельных элементов мозаики не коррелированы. В этом случае элементы матрицы, характеризующей фазовый экран, будут иметь вид [7]

$$a_{ik}(\rho) = \delta_{ik} + \Delta(\rho)n_i(\rho)n_k(\rho), \qquad (8)$$

где $\Delta = e^{i\delta} - 1$, $\{n_1;\ n_2\} = \mathbf{n}$. Усреднение величин a_{ik}, $a_{ik}(\rho)\,a_{lm}^*(\rho')$ дает

$$\langle a_{ik}(\rho)\rangle = \delta_{ik} + \langle\Delta\rangle\langle n_i n_k\rangle, \qquad (9)$$

$$\tilde{a}_{ik}(\rho) = \Delta n_i n_k - \langle\Delta\rangle\langle n_i n_k\rangle, \qquad (10)$$

$$\langle\tilde{a}_{ik}(\rho)\tilde{a}_{lm}^*(\rho')\rangle = \langle\Delta(\rho)\Delta^*(\rho')n_i(\rho)n_k(\rho)n_l(\rho')n_m(\rho')\rangle -$$

$$- \langle\Delta\rangle\langle\Delta\rangle^*\langle n_i n_k\rangle\langle n_l n_m\rangle. \qquad (11)$$

Первый член в (11) равен

$$P(\rho-\rho')\langle\Delta^*\Delta\rangle\langle n_i n_k n_l n_m\rangle + (1-P(\rho-\rho'))\langle\Delta\rangle\langle\Delta^*\rangle\langle n_i n_k\rangle\langle n_l n_m\rangle. \qquad (12)$$

Здесь $P(\rho-\rho')$ — вероятность того, что две точки с координатами ρ, ρ' находятся в пределах одного и того же элемента мозаики. Согласно [7] можно положить $P(\rho-\rho') = e^{-p|\rho-\rho'|}$, $p = 1/l$ — обратный характерный размер элемента мозаики. В этом случае путем подстановки (12) в (11) найдем, что

$$\langle\tilde{a}_{ik}\tilde{a}_{lm}^*\rangle(\rho-\rho') = (\langle|\Delta|^2\rangle\langle n_i n_k n_l n_m\rangle - |\langle\Delta\rangle|^2\langle n_i n_k\rangle\langle n_l n_m\rangle)\,e^{-p|\rho-\rho'|}. \qquad (13)$$

Для вычисления величин $\langle n_i n_k\rangle$ и $\langle n_i n_k n_l n_m\rangle$ предположим, что ось симметрии распределения единичного вектора $\mathbf{n}$ по направлениям совпадает с единичным вектором $\mathbf{k}$. Тогда оси симметрии $\langle n_i n_k\rangle$ и $\langle n_i n_k n_l n_m\rangle$ также будут совпадать с направлением $\mathbf{k}$; согласно [7] эти параметры представляются единственным образом:

$$\langle n_i n_k \rangle = \alpha\delta_{ik} + \beta k_i k_k,$$

$$\langle n_i n_k n_l n_m \rangle = \gamma(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + \tau(\delta_{ik}k_l k_m + \delta_{il}k_k k_m + \delta_{im}k_k k_l + \delta_{kl}k_i k_m + \delta_{km}k_i k_l + \delta_{lm}k_i k_k) + \varepsilon k_i k_k k_l k_m, \qquad (14)$$

где α, β, γ, τ, ε — числовые константы, определяемые при вычислении сверток тензоров;

$$\begin{gathered}
\langle n_i n_i \rangle = \alpha\delta_{ii} + \beta k_i k_i = 2\alpha + \beta = 1,\\
\langle n_i n_k \rangle k_i k_k = \langle \cos^2 \widehat{\mathbf{nk}} \rangle \equiv C_2 = \alpha + \beta,\\
\langle n_i n_k n_i n_k \rangle = 8\gamma + 8\tau + \varepsilon = 1,\\
\langle n_i n_i n_k n_l \rangle k_k k_l = C_2 = 4\gamma + 7\tau + \varepsilon,\\
\langle n_i n_k n_l n_m \rangle k_i k_k k_l k_m = \langle \cos^4 \widehat{\mathbf{nk}} \rangle \equiv C_4 = 3\gamma + 6\tau + \varepsilon.
\end{gathered} \qquad (15)$$

Система (15) решается относительно заданных параметров C_2 и C_4:

$$\begin{gathered}
\alpha = 1 - C_2, \quad \gamma = (1/3)(1 - 2C_2 + C_4),\\
\beta = 2C_2 - 1, \quad \tau = (1/3)(5C_2 - 4C_4 - 1),\\
\varepsilon = 1 + 8C_4 - 8C_2.
\end{gathered} \qquad (16)$$

В результате подстановки (9), (11), (13) в (7) и последующего интегрирования матрица поляризации приобретает вид, аналогичный (7):

$$I_{il} = A_{il} \frac{\mathcal{F}_1^2 (k\rho_F a/F)}{(k\rho_F a/F)^2} + B_{il}\left[1 + \left(\frac{k\rho_F}{pF}\right)^2\right]^{-3/2}, \qquad (17)$$

где $A_{il} = \frac{k^2 a^4}{F^2}[u_i(1 + \alpha\langle\Delta\rangle) + \langle\Delta\rangle \beta k_i \mathbf{uk}][u_l^*(1 + \alpha\langle\Delta\rangle^*) + \langle\Delta^*\rangle \beta k_l \mathbf{u^*k}]$, $B_{il} = \frac{2k^2a^2}{p^2F^2}[\langle|\Delta^2|\rangle(\gamma(u_i u_l^* + u_i^* u_l + \delta_{il} I) + \tau(u_i k_l \mathbf{ku^*} + k_i u_l \mathbf{ku^*} + k_i u_l^* \mathbf{ku} + u_i^* k_l \mathbf{ku} + \delta_{il}|\mathbf{ku}|^2 + k_i k_l I) + \varepsilon k_i k_l |\mathbf{ku}|^2) - |\langle\Delta\rangle|^2 (\alpha u_i + \beta k_i \mathbf{uk})(a u_l^* + \beta k_l \mathbf{u^*k})]$.

Интерес представляет частный случай выражения (17), когда падающий свет линейно поляризован. В этом случае $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$. Если, кроме того, $\mathbf{k} \perp \mathbf{u}$, то средняя интенсивность света, поляризованного в плоскости, параллельной $\mathbf{k}$, равна

$$I_\parallel = k_i k_l I_{il} = [(4k^2a^2)/p^2F^2[1 + (k\rho_F/pF)^2]^{-3/2}](1 - \langle\cos\delta\rangle)(C_2 - C_4)|\mathbf{u}|^2. \qquad (18)$$

Для макроскопически изотропного фазового экрана величина

$$C_2 - C_4 = 1/2 - 3/8 = 1/8 \text{ и}$$

$$I_\parallel/|\mathbf{u}|^2 = (k^2a^2/2p^2F^2)(1 - \langle\cos\delta\rangle)/[1 + (k\rho_F/pF)^2]^{-3/2}. \qquad (19)$$

Очевидно, что интенсивность света в центре фокальной плоскости линзы $\rho_F = 0$ будет линейно зависеть от средней площади элементов мозаики $\langle S\rangle \equiv 2\pi/p^2 : I_\parallel \sim (k^2a^2/F^2)\langle S\rangle(1 - \langle\cos\delta\rangle)$.

Рассмотренная модель объясняет увеличение деполяризации с ростом размера зерен керамики и величины их двулучепреломления, пропорциональной $1 - \langle\cos\delta\rangle$. По мере упорядочения ориентации главных осей элементов мозаики вдоль направления $\mathbf{k}$ параметр $C_2 - C_4 \to 0$ и «деполяризация» $I_\parallel/|\mathbf{u}|^2$ стремятся к нулю.

Аналогичным образом можно найти распределение средней интенсивности света, прошедшего через находящийся между скрещенными поляризаторами фазовый экран, для случая, когда угол наклона оси $\mathbf{k}$

к оси главного пропускания анализатора составляет величину φ,

$$I_\varphi(\rho_F) = \frac{k^2a^4}{4F^2}\frac{\mathcal{F}_1^2(k\rho_F a/F)}{(k\rho_F a/F)^2}\left(4C_2^2 + 1 - 4C_2\right)(1 - 2\langle\cos\delta\rangle + \langle\cos\delta\rangle^2 + $$
$$+ \langle\sin\delta\rangle^2)\sin^2 2\varphi + \frac{2k^2a^2}{p^2F^2}\left[1 + \left(\frac{\rho_F k}{pF}\right)^2\right]^{-3/2}\left\{2(1 - \langle\cos\delta\rangle)\left[(C_2 - C_4) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1 + 8C_4 - 8C_2}{4}\sin^2 2\varphi\right] - \frac{1 - 2\langle\cos\delta\rangle + \langle\cos\delta\rangle^2 + \langle\sin\delta\rangle^2}{4}\times$$
$$\left.\times\left(4C_2^2 + 1 - 4C_2\right)\sin^2 2\varphi\right\}. \qquad (20)$$

В отсутствие выделенного направления $\mathbf{k}$, т. е. макроскопической изотропии, $C_2 = 1/2$, $C_4 = 3/8$. Выражение (20) обращается в (19) и, естественно, не зависит от φ. Следует подчеркнуть, что в этом случае регулярная компонента средней интенсивности отсутствует и ее распределение обусловлено исключительно флуктуациями. При этом характерный размер области, в которой средняя интенсивность существенно отличается от нуля, определяется видом функции $[1 + (\rho_F k/pF)^2]^{-3/2}$, которая быстро спадает при $\rho_F > pF/k$.

Таким образом, установлено, что характерные размеры дифракционных изображений зависят от соотношения вкладов регулярной и флуктуирующей частей выражения (20). Рассеяние света, обусловленное флуктуациями, согласно (17) описывается слагаемым $B_{ii}[1 + (\rho_F k/pF)^2]^{-3/2}$. Оказывается, что рассеяние при прочих равных условиях зависит от состояния поляризации падающего света. Действительно, из рассмотрения случая полной анизотропии, когда $C_2 = C_4 = 1$, следует, что

$$B_{ii} = (2k^2a^2/p^2F^2)(1 - \langle\cos\delta\rangle^2 - \langle\sin\delta\rangle^2)|\mathbf{ku}|^2, \qquad (21)$$

а выражение (17) приобретает вид

$$I = (2k^2a^2/p^2F^2)(1 - \langle\cos\delta\rangle^2 - \langle\sin\delta\rangle^2)|\mathbf{ku}|^2[1 + (k\rho_F/pF)^2]^{-3/2}. \qquad (22)$$

Итак, максимальное рассеяние ожидается в случаях, когда поляризация падающего света совпадает с осью симметрии $\mathbf{k}$.

На основании полученных результатов можно интерпретировать результаты экспериментов с тонкими пластинками из ЦТСЛ. Например, найденный в работе [8] дихроизм в рамках настоящей модели является следствием упорядочения двулучепреломляющих областей в направлении внешнего поля, когда параметры распределения C_2, $C_4 \to 1$, а дисперсия двулучепреломления $\langle\delta^2\rangle - \langle\delta\rangle^2$ увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лайнс М., Гласс А.** Сегнетоэлектрики и родственные им материалы.— М.: Мир, 1981.
2. **Денисов Н. Г.** О дифракции волн на хаотическом экране.— Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1961, т. 4, № 4, с. 630—638.
3. **Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжков В. А., Урядов В. П.** О статистических свойствах флуктуаций интенсивности волны за хаотическим фазовым экраном.— Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1968, т. 11, № 9, с. 1371—1376.
4. **Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И.** Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.— УФН, 1970, т. 102, вып. 1, с. 3—42.
5. **Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И.** Статистические проблемы в теории дифракции.— УФН, 1975, т. 115, вып. 2, с. 239—262.
6. **Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.** Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1978, ч. II.
7. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
8. **Капениекс А. Э.** Определение матрицы Мюллера прозрачной сегнетокерамики типа ЦТСЛ в поперечном электрическом поле.— Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук, 1980, № 6, с. 61—65.

Поступила в редакцию 23 марта 1982 г.