

В. Я. ЛЕВИН, Н. Г. МЕЗЕНЦЕВА, С. И. СОСКИН  
(Новосибирск)

## ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА АБЕРРАЦИЙ ПРИ ЗАМЕНЕ ГОЛОГРАММНОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА ЭКВИВАЛЕНТНОЙ АСФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗОЙ

Цель данной работы — изучение погрешностей расчета монохроматических aberrаций голограммных оптических элементов (ГОЭ) на ЭВМ, возникающих в результате замены ГОЭ эквивалентными линзовыми рефракционными оптическими элементами (РОЭ). В работе даны рекомендации по выбору оптимальных параметров РОЭ, обеспечивающих минимальные погрешности.

При применении голограммных и киноформных оптических элементов возникает необходимость их соединения с обычными зеркалами и линзами для того, чтобы обеспечить требуемые aberrационные характеристики оптической системы в целом. При расчете комбинированных систем на ЭВМ для дифракционных и рефракционных элементов обычно используют различные алгоритмы: так, первые из них рассчитываются по формулам Оффера [1], вторые — по формулам Федерера [2]. Это исключает возможность применения стандартных программ. Для преодоления указанной трудности в [3] предложено описывать фокусирующие и aberrационные свойства ГОЭ с помощью эквивалентного РОЭ, представляющего собой линзу с асферическими поверхностями. Профиль поверхностей подбирается из условия создания безaberrационного изображения для центра поля зрения. При этом полевые aberrации ГОЭ и РОЭ несколько отличаются, чем объясняются погрешности, обусловленные использованием линзовой модели вместо голограммы. По оценкам [3, 4] эта ошибка уменьшается с ростом показателя преломления  $n$  линзы, из чего заключено, что, выбирая достаточно большие  $n$ , можно рассчитать aberrации ГОЭ по линзовой модели с любой заданной точностью.

В действительности, помимо указанных ошибок, имеются другие погрешности, обусловленные применением стандартных программ и алгоритмов расчета, а также точностью представления чисел в ЭВМ. Эти погрешности в отличие от ошибок моделей РОЭ существуют для аксиального и внесевого пучков и, как следует из дальнейшего рассмотрения, увеличиваются по мере роста  $n$ . В результате влияния обоих факторов точность расчета aberrаций с использованием модели РОЭ не может быть сколь угодно большой. Кроме того, существует оптимальный показатель преломления  $n$ , обеспечивающий минимальную суммарную погрешность.

Рассмотрим влияние обоих факторов на точность вычислений. Погрешности неточности модели РОЭ иллюстрируются рис. 1. Для осевого пучка ГОЭ и РОЭ формируют стигматическое изображение в точке  $O$ ; согласно [3] это обеспечивается гиперболиче-

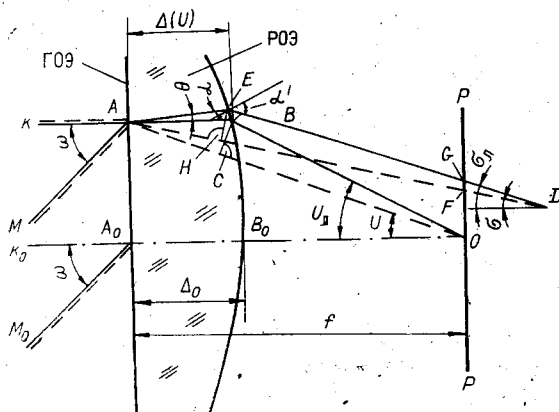


Рис. 1. Ход лучей через ГОЭ (штриховые линии) и РОЭ (сплошные линии) при падении осевого (лучи  $KA$  и  $K_0A_0$ ) и внеосевого (лучи  $MA$ ,  $M_0A_0$ ) параллельных пучков:

$PP$  — плоскость изображения;  $A_0O$  — оптическая ось ГОЭ;  $\omega$  — угол поля зрения;  $U, U_d$  — текущие углы для ГОЭ и РОЭ;  $\Delta(U), \Delta_0$  — толщина РОЭ.

ским профилем РОЭ. В то же время во внеосевом пучке имеются aberrации, различные для ГОЭ и РОЭ. Разность указанных aberrаций  $\delta L_o(U)$  определяет погрешность модели РОЭ.

Найдем приращение эйконала  $\Delta L_o(U)$  рефракционного оптического элемента по сравнению с ГОЭ для внеосевого пучка. Из рис. 1 следует, что

$$\Delta L_o(U) = AEn + ED - AD. \quad (1)$$

Вследствие малости угла между лучами  $ED$  и  $AD$

$$AD - ED \approx AH, \quad (2)$$

где  $H$  — основание перпендикуляра  $EH$  на луч  $ED$ ,

$$AH = AE \cos(\sigma + \Theta), \quad (3)$$

$$AE = \Delta / \cos \Theta. \quad (4)$$

Подстановка (2)–(4) в (1) дает

$$\Delta L_o(U) = (\Delta / \cos \Theta) [n - \cos(\sigma + \Theta)]. \quad (5)$$

В свою очередь, углы  $\sigma$  и  $\Theta$  определяются соответственно формулой дифракционной решетки и законом Снеллиуса:

$$\sin \sigma = \sin U - \sin \omega, \quad (6)$$

$$\sin \Theta = \sin \omega / n. \quad (7)$$

Погрешность волновой aberrации  $\delta L_o(U)$  находится по формуле

$$\delta L_o(U) = \Delta L_o(U) - \Delta L_o(0). \quad (8)$$

Для центра поля зрения ( $\omega = 0$ ) из (5), (6), (8) следует, что

$$\delta L_o(U) = \Delta(n - \cos U) - \Delta_o(n - 1). \quad (9)$$

Из (9) и условия отсутствия aberrации в точке на оси  $\Delta L_o(U) \approx 0$  вытекает соотношение

$$\Delta(n - \cos U) = \Delta_o(n - 1), \quad (10)$$

задающее профиль линзы.

Соотношения (5)–(10) определяют погрешность  $\delta L_o(U)$  модели РОЭ при произвольном угле поля зрения. В первом приближении  $\delta L_o(U)$  можно найти, полагая  $n \gg 1$ ,  $U \approx \sin U \ll 1$ ,  $\omega \approx \sin \omega \ll 1$ ; тогда

$$\delta L_o(U) = \Delta U \omega (n - 1) / n. \quad (11)$$

Волновой погрешности  $\delta L_o(U)$  соответствует угловая погрешность  $\epsilon_o(U)$ ; очевидно, что связь между волновой и угловой погрешностями аналогична связи между волновыми и угловыми aberrациями (5). Поэтому, дифференцируя (11), находим

$$\epsilon_o(U) = 2U \omega (n - 1) \Delta / n \Phi \quad (12)$$

( $\Phi$  — световой диаметр ГОЭ).

Из (11), (12) наибольшие возможные погрешности  $\delta L_{\max}$ ,  $\epsilon_{\max}$  реализуются, когда наибольшая толщина РОЭ соответствует краю апертуры:

$$U = v, \quad \omega = \Omega, \quad \Delta(U) = \Delta^{\max},$$

где  $v$  — апертурный угол ГОЭ,  $2\Omega$  — угол поля зрения, при этом из (11), (12) получаем

$$\delta L_{\max} = \Delta^{\max} v \Omega (n - 1) / n, \quad (13)$$

$$\epsilon_{\max} = 2v \Omega (n - 1) \Delta^{\max} / n \Phi. \quad (14)$$

Формулы (13), (14) легко обобщить для случая, когда на ГОЭ падает не плоский, а сферический волновой фронт. Пусть  $v_1$ ,  $v_2$  определяют апертуру на входе и выходе ГОЭ. Тогда, как и в работе [3], эквивалентный РОЭ может быть заменен двумя линзовыми элементами, плоские поверхности которых расположены вплотную друг к другу, а наиболь-

шие толщины соответственно равны  $\Delta_1^{\max}, \Delta_2^{\max}$ . Первый из линзовых элементов коллимирует падающий фронт, второй превращает плоский волновой фронт в гомоцентрический. Обобщая (13), (14) и учитывая, что  $\Delta_1^{\max}, \Delta_2^{\max}$  связаны с деформацией  $W_1^{\max}, W_2^{\max}$  формулой  $\Delta_{1,2}^{\max} = W_{1,2}^{\max}/(n-1)$ , имеем

$$\delta L_{\max} = \Omega(W_1^{\max}v_1 + W_2^{\max}v_2)/n, \quad (15)$$

$$\varepsilon_{\max} = 2\Omega(W_1^{\max}v_1 + W_2^{\max}v_2)/n\Phi. \quad (16)$$

Можно показать, что соотношения (13) и (14), а следовательно, соотношения (15) и (16), полученные в предположении отсутствия сферической аберрации у ГОЭ, справедливы в более общем случае, когда аберрации вносятся в оптическую систему голограммой. В зависимости от величины и характера аберраций изменяется только зависимость  $\Delta(U), W(U)$ . Из (15) и (16) следует, что волновые и угловые ошибки увеличиваются с расширением поля зрения и апертур, в котором работает ГОЭ в составе оптической системы.

Сравним эти результаты с уже известной оценкой погрешности, проведенной для  $\omega = \pi/2$ . Согласно [3] эта погрешность определяется как приращение эйконала  $\Delta L\pi/2$  РОЭ при «скользящем» падении луча МА (см. рис. 1) по сравнению с лучом КА, падающим по нормали ( $\omega = 0$ ):

$$\Delta L\pi/2 = \Delta_{\max}/2n. \quad (17)$$

В качестве примера в [3] рассмотрена зонная пластинка Френеля диаметром 20 мм, с фокусным расстоянием 100 мм ( $v = 0,1$ ) и  $n = 10\,000$ , эквивалентная плосковыпуклой линзе с  $\Delta_{\max} = \lambda/10$ , для которой из (17) следует, что  $\Delta L\pi/2 = \lambda/200\,000$ .

Для той же линзы расчет по (13) даже при малом угле поля зрения ( $\Omega = 0,1$ ) дает  $\delta L_{\max} = \lambda/1000$ , что в 200 раз превышает оценку по (17). Это расхождение связано с тем, что в [3] учтено изменение эйконала  $\Delta L_{\omega}$  из-за конечной толщины эквивалентной линзы при косом падении, однако не учтено аналогичное приращение эйконала, возникающее в моделируемом ГОЭ при изменении апертурного и полевого углов, описываемое формулой решетки (6). Этот неучтенный фактор и есть причина основной ошибки.

Другая группа погрешностей обусловлена алгоритмом расчета лучей через рефракционный элемент, точностью представления чисел в ЭВМ, режиме работы. Оценим алгоритмические погрешности для наиболее распространенного алгоритма Федера, программные реализации которого в режиме с плавающей запятой дают наилучшие по точности результаты [2].

В наибольшей мере точность теряется при вычислении разности двух близких по величине чисел [6]. Из анализа алгоритма Федера следует, что погрешность возникает в основном при вычислении направляющего косинуса луча, выходящего из РОЭ (см. рис. 1):

$$\cos \alpha' = \sqrt{1 - n^2(1 - \cos^2 \alpha)}, \quad (18)$$

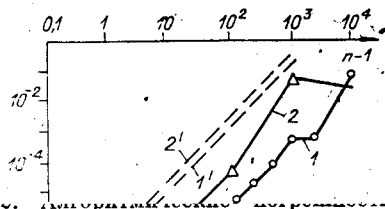
где  $\alpha, \alpha'$  — соответственно углы падения и преломления луча на выходной поверхности РОЭ. Погрешность вычисления направляющего косинуса найдем, дифференцируя (18):

$$d(\cos \alpha') = (n^2 \cos \alpha d(\cos \alpha) - (1 - \cos^2 \alpha)ndn)/\cos \alpha'. \quad (19)$$

При  $n \gg 1$   $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\cos \alpha' \approx \cos v_2$ ; тогда угловая ошибка

$$\beta = n^2 d(\cos \alpha)/\cos v_2. \quad (20)$$

Здесь  $d(\cos \alpha)$  — расчетная погрешность, определяемая точностью представления чисел в ЭВМ в режиме с плавающей запятой  $d(\cos \alpha) = k \cos \alpha \approx k$ . Для 32-разрядных машин коэффициент  $k$  может принимать значения  $k \leq 10^{-7}$  при нормальной и  $k \leq 10^{-14}$  при двойной точности [6].



расчете плоскопараллельной пластинки:  
 кривая 1 — погрешность для апертурного угла  $U = 6^\circ$ , 2 — для  $U = 45^\circ$ , штриховые прямые 1', 2' — наибольшие алгоритмические погрешности при нормальной точности расчета  $k = 10^{-7}$ ; ломаные 1, 2 — расчет лучей на ЭВМ.

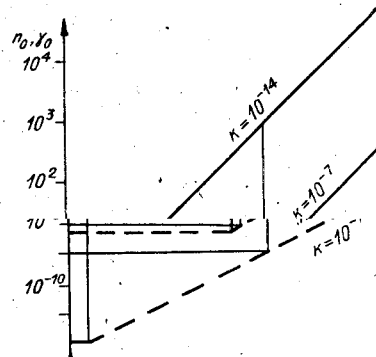


Рис. 3. Оптимальные значения показателя преломления  $n_0$  (сплошные линии) и соответствующие им погрешности  $\gamma_0$  (штриховые) при нормальной  $k = 10^{-7}$  и двойной  $k = 10^{-14}$  точности расчета.

Наибольшее значение алгоритмической погрешности

$$\beta_{\max} = n^2 k / \cos v_2. \quad (21)$$

Из выражения (21) следует, что алгоритмическая погрешность (в отличие от ранее рассмотренной ошибки модели РОЭ —  $\varepsilon$ ) увеличивается по мере роста показателя преломления РОЭ.

Примеры численного расчета зависимости погрешности модели РОЭ от  $n$  даны в [3]. В то же время зависимость  $\beta_{\max}$  от показателя преломления нуждается в проверке. Поэтому выражение (21) проверялось численным экспериментом, для чего была использована программная реализация алгоритма [2] с нормальной точностью. С помощью программы рассчитан гомоцентрический сходящийся пучок через тонкую ( $\Delta_{\max} = 0,001$  мкм) плоскопараллельную пластинку. Очевидно, что aberrации такой пластинки исчезающе малы и размеры пятна рассеяния в плоскости изображения характеризуют ошибки расчета, показанные на рис. 2. Видно, что зависимость (21) верно оценивает наибольшее значение алгоритмической погрешности.

Суммарная погрешность расчета  $\gamma$  обусловлена двумя рассмотренными частными погрешностями. Дифференцированием по  $n$  суммарной погрешности  $\gamma = \varepsilon_{\max} + \beta_{\max}$  ( $\varepsilon_{\max}$  и  $\beta_{\max}$  определены в (16) и (21)) найдем минимум  $\gamma$ . Последний реализуется при  $\beta_{\max} = \varepsilon_{\max}/2$ .

Соответствующее минимуму  $\gamma$  значение показателя преломления  $n_0$  обеспечивает наилучшую точность расчета:

$$n_0 = G \sqrt[3]{\cos v_2 / k}, \quad (22)$$

где 
$$G = [(\Omega/\Phi)(W_1^{\max} v_1 + W_2^{\max} v_2)]^{1/3} \quad (23)$$

— обобщенный параметр ГОЭ.

Из (22), (23) следует, что для достижения наилучшей точности показатель преломления РОЭ, замещающих ГОЭ, рекомендуется выбирать в зависимости от основных параметров ГОЭ и точности расчетной программы. Найденному оптимальному значению  $n_0 \geq 1$  соответствует суммарная погрешность

$$\gamma_0 = 3G^2 \sqrt[3]{k/\cos v_2}. \quad (24)$$

Из (24) видно, что по мере увеличения основного параметра ГОЭ погрешности расчета растут. Пользуясь формулой (24), можно решить во-

прос о пригодности той или иной расчетной программы для расчета оптической системы, включающей ГОЭ. При решении этого вопроса среди входящих в оптическую систему ГОЭ выделяют элементы, имеющие наибольшее значение обобщенного параметра  $G$ , а затем сравнивают ожидаемую угловую погрешность  $\gamma_0$  с допуском на точность расчета.

Чтобы проиллюстрировать связь обобщенного параметра с конструктивными параметрами ГОЭ, найдем по (23) максимальное значение  $G$  для оптического элемента и зонной пластинки Френеля. Очевидно, что деформация волнового фронта, вносимая ГОЭ, не превышает его диаметра —  $W_1^{\max}/\Phi < 1$ ; кроме того, согласно [7]  $v_1\Omega < 1/2$ . Поэтому наибольшее значение обобщенного параметра  $G \leq 1$ . Для зонной пластинки Френеля конструктивные параметры много меньше максимальных:  $W^{\max}/\Phi = 0,025$ ;  $v = 0,1$ ;  $\Omega = 0,1$ ; поэтому обобщенный параметр  $G = 0,061$ . Таким образом, обобщенный параметр стремится к нулю по мере уменьшения  $v_1$ ,  $\Omega_1$ ,  $W^{\max}$  и изменяется в пределах  $G = [0 \div 1]$ .

На рис. 3 даны графики рекомендуемых значений показателя преломления  $n_0$  в зависимости от  $G$ . Здесь же показаны погрешности, вычисленные согласно формуле (24).

Пользуясь графиками, нужно учитывать, что погрешности расчета aberrаций, как правило, не должны превышать долей угловой секунды, т. е.  $10^{-8} \div 10^{-6}$ . Поэтому, используя программы с нормальной точностью  $k = 10^{-7}$ , можно рассчитывать оптические системы с малым полем зрения, оптические системы с ГОЭ, несущественно деформирующими волновой фронт ( $G \leq 10^{-2}$ ). Такими элементами являются, например, осевые корректоры aberrаций. В то же время программы с двойной точностью  $k = 10^{-14}$  пригодны для расчета комбинированных оптических систем с голограммами, деформирующими волновой фронт в пределах  $G \leq 10^{-1}$ , т. е. с голограммными осевыми линзами. Когда необходима высокая точность расчета, а параметр  $G > 10^{-1}$  (например, для внеосевых голограммных линз большой светосилы), рассмотренный метод замены не дает удовлетворительных результатов. Поэтому для расчета лучей через систему нужно разрабатывать специализированное программное обеспечение, использующее формулы Оффнера.

Авторы благодарят Л. И. Пржевалинского за полезное обсуждение применимости алгоритмов Федера для расчета элементов дифракционной оптики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ofner A. Ray tracing through holographic system.— JOSA, 1966, vol. 56, p. 1509.
2. Леонова В. Б. Автоматизация расчетов оптических систем.— М.: Машиностроение, 1970.
3. Sweatt W. C. Describing holographic optical elements as lenses.— JOSA, 1977, vol. 67, p. 803.
4. Пименов Ю. Д. О точности моделирования aberrаций голографических оптических элементов.— В кн.: Материалы III Всесоюз. конф. по голографии. Ульяновск, 26 августа 1978 г. Л.: ЛФТИ, 1978, с. 97—98.
5. Бори М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1973.
6. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ.— М.: Мир, 1977.
7. Волосов Д. С. Фотографическая оптика.— М.: Искусство, 1971.

*Поступила в редакцию 19 октября 1983 г.*