УДК 621.391.2

В. П. БАКАЛОВ

(Москва)

ДВУМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ СИГНАЛЫ, ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЕ ПО АМПЛИТУДНОМУ СПЕКТРУ

Во многих задачах статистической радиотехники, оптики и акустики для анализа и обработки сигналов используются амплитудный спектр и однозначно связанные с ним энергетический спектр и автокорреляционная функция. Восстановление сигнала по его амплитудному спектру в общем случае невозможно из-за потери информации о фазовом спектре.

Для одномерного случая известны ситуации, когда сигнал может быть восстановлен по амплитудному спектру. Это оказывается возможным при наличии определенной априорной информации о сигнале. В частности, допускают восстановление так называемые минимально-фазовые сигналы. В случае двумерных дискретных [1, 3, 7] и непрерывных [2] сигналов их реконструкция по амплитудному спектру возможна в ситуациях, не имеющих аналога для одномерного случая. Рассмотрим условия, достаточные для восстановления двумерных непрерывных сигналов по амплитудному спектру.

Пусть задан пространственно-ограниченный комплексный сигнал

$$f(x, y)=0 \quad \text{при} \quad (x, y)\notin S,$$
$$f(x, y)\neq 0 \quad \text{при} \quad (x, y)\in S,$$

S — ограниченная область.

Для реального сигнала всегда можно определить пространственный спектр $F(u, v)$:

$$f(x, y) \div F(u, v)=\iint_S f(x, y)\exp[-j(ux+vy)]dxdy.$$

Цель дальнейшего изложения состоит в исследовании возможности восстановления двумерного сигнала по амплитудному спектру $|F(u, v)|$ или, что эквивалентно его квадрату, $|F(u, v)|^2=F(u, v)\overset{*}{F}(u, v)$.

Очевидно, что по амплитудному спектру не различаются следующие трансформации сигнала:

умножение на постоянный фазовый множитель $\exp[j\varphi]$;

линейное смещение $f(x, y)$, соответствующее множителю $\exp[-j(ux_c+vy_c)]$ в спектре, где x_c, y_c — величины смещения по x и y;

«зеркальное» отображение $f(x, y)$, приводящее к замене спектра комплексно-сопряженной величиной $\overset{*}{f}(-x, -y)\div\overset{*}{F}(u, v)$.

Таким образом, под однозначным восстановлением будем понимать восстановление сигнала $f(x, y)$ с точностью до постоянного фазового множителя, линейного сдвига и зеркального отображения.

Рассмотрим свойства спектра пространственно-ограниченного сигнала. В соответствии с обобщенной теоремой Винера — Палея [4] спектр $F(\xi, \eta)$ является целой функцией экспоненциального типа комплексных переменных ξ, η; при этом пространственные частоты u и v представляют собой действительные части ξ и η.

Для изучения связи амплитудного и фазового спектров удобно, если это возможно, разложить спектр на произведение сомножителей. Для одномерных целых функций известно их приведение к каноническому произведению [4].

В многомерном случае не существует аналога канонического представления, однако можно воспользоваться «условным» каноническим разложением по каждой из переменных в отдельности [4]. В соответствии с этим используем два полностью равноправных разложения функции $F(u, v)$.

Если считать $F(u, v)$ целой функцией экспоненциального типа переменной v с параметром u, то, применяя разложение Бореля — Адамара для целых функций порядка единицы, можно записать

$$F(u, v) = \exp[C_1(u) + vC_2(u)] \prod_{k=1}^{\infty} [1 - v/v_k(u)] \exp[v/v_k(u)], \qquad (1)$$

где $C_1(u)$, $C_2(u)$ — комплексные функции переменной u; $v_k(u)$ — нули $F(u, v)$. Здесь и далее не учитывается частный случай, когда в $F(u, v)$ могут быть выделены сомножители, зависящие лишь от одной из переменных — u или v. Этот случай соответствует представлению $f(x, y)$ в виде свертки функций, из которых хотя бы одна одномерна, поэтому возможность восстановления $f(x, y)$ по $|F(u, v)|$ определяется известными свойствами одномерных функций.

Если рассматривать $F(u, v)$ как целую функцию экспоненциального типа по переменной u при параметре v, то

$$F(u, v) = \exp[C_3(v) + uC_4(v)] \prod_{l=1}^{\infty} \left[1 - \frac{u}{u_l(v)}\right] \exp\left[\frac{u}{u_l(v)}\right], \qquad (2)$$

где $C_3(v)$ и $C_4(v)$ — комплексные функции; $u_l(v)$ — нули функции $F(u, v)$ при переменной v, взятой в качестве параметра.

Поскольку разложения (1) и (2) равноправны, все функции переменной v, входящие в (2), могут быть однозначно определены из (1), точно так же, как все функции переменной u в (1) могут быть найдены из (2). Например, зная нули $v_k(u)$, можно рассчитать нули $u_l(v)$. Используя для этого первый сомножитель под знаком произведения в (1), получим

$$u_{kn}(v) = v_k^{-1}(v), \; k = 1, 2, \ldots, \; n = 1, 2, \ldots . \qquad (3)$$

Здесь $v_k^{-1}(v)$ — функция, обратная $v_k(u)$, которая определяется из уравнения $v_k(u_{kn}) - v = 0$. В силу возможной неоднозначности функции v_k^{-1} одному нулю могут соответствовать один $(n = 1)$, часть или все $(n = 1, 2, \ldots)$ нули u_l так же, как и одному нулю u_l может соответствовать несколько нулей v_k:

$$v_{lm}(u) = u_l^{-1}(u), \; l = 1, 2, \ldots; \; m = 1, 2, \ldots . \qquad (4)$$

Очевидно, что из наличия нескольких или бесконечного числа подмножеств взаимно связанных нулей u_l и v_k (случай, когда значения n и m являются подмножествами значений k и l соответственно) вытекает возможность разложения целой функции на произведение нескольких целых функций, для каждой из которых все нули в разложениях, эквивалентных (1) и (2), однозначно определяются по одному из нулей. В пространстве x, y это означает возможность представления $f(x, y)$ в виде свертки нескольких пространственно-ограниченных функций.

Если же множество значений n и m эквивалентно множеству значений k и l, то спектр $F(u, v)$ не может быть разложен в произведение целых функций. В пространстве x, y это эквивалентно тому, что сигнал $f(x, y)$ непредставим как свертка функций. Этот важный случай назовем случаем жесткой функциональной зависимости всех нулей друг от друга.

Одномерный пространственно-ограниченный сигнал, для которого спектр всегда приводится к каноническому произведению, может являться сверткой любого количества (эквивалентного счетному множеству) пространственно-ограниченных функций. Рассмотрим с учетом указанных свойств возможность восстановления двумерного пространственно-ограниченного сигнала по $|F(u, v)|^2$. Для этого в соответствии с (1) и

(2) запишем два равноправных выражения для $|F(u, v)|^2$:
из (1) —

$$|F(u, v)|^2 = \exp[2R_1 + 2vR_2] \prod_{k=1}^{\infty} [1 - v/v_k]\,[1 - v/\overset{*}{v}_k] \exp[v/v_k + v/\overset{*}{v}_k],$$

из (2) — (5)

$$|F(u, v)|^2 = \exp[2R_3 + 2uR_4] \prod_{l=1}^{\infty} [1 - u/u_l]\,[1 - u/\overset{*}{u}_l] \exp[u/u_l + u/\overset{*}{u}_l]. \qquad (6)$$

В (5) и (6) через $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(v)$, $R_4(v)$ обозначены действительные части $C_1(u)$, $C_2(u)$, $C_3(v)$, $C_4(v)$. Будем искать сигнал $\widehat{f}(x, y)$, спектр которого $\widehat{F}(u, v)$ удовлетворяет условию

$$|\widehat{F}(u, v)|^2 = |F(u, v)|^2. \qquad (7)$$

Рассмотрим возможные отличия $\widehat{f}(x, y)$ и $\widehat{F}(u, v)$ от восстанавливаемого сигнала $f(x, y)$ и его спектра $F(u, v)$. Если при решении (7) используется (5), то возможные отличия $\widehat{F}(u, v)$ от $F(u, v)$ характеризуются тремя компонентами [5]:

1) мнимая часть $\operatorname{Im} C_1(u) = I_1(u)$;
2) мнимая часть $\operatorname{Im} C_2(u) = I_2(u)$;
3) произвольное число нулей v_k в $\widehat{F}(u, v)$ может быть заменено их комплексно-сопряженными значениями по сравнению с $F(u, v)$.

Аналогично при восстановлении по (6) $\widehat{F}(u, v)$ может отличаться от $F(u, v)$ следующим:

1) мнимая часть $\operatorname{Im} C_3(v) = I_3(v)$;
2) мнимая часть $\operatorname{Im} C_4(v) = I_4(v)$;
3) замена произвольного числа нулей $u_l(v)$ на их комплексно-сопряженное значение.

Таким образом, в соответствии с (5) спектр $\widehat{F}(u, v)$ запишется как

$$\widehat{F}(u, v) = F(u, v) \exp[jI_1 + jvI_2] \prod_{k_1=1}^{K_1} \frac{[1 - v/\overset{*}{v}_{k_1}]}{[1 - v/v_{k_1}]} \exp\left[\frac{v}{\overset{*}{v}_{k_1}} - \frac{v}{v_{k_1}}\right]. \qquad (8)$$

При восстановлении спектра по (6)

$$\widehat{F}(u, v) = F(u, v) \exp[jI_3 + juI_4] \prod_{l_1=1}^{L_1} \frac{[1 - u/\overset{*}{u}_{l_1}]}{[1 - u/u_{l_1}]} \exp\left[\frac{u}{\overset{*}{u}_{l_1}} - \frac{u}{u_{l_1}}\right]. \qquad (9)$$

В соотношениях (8) и (9) k_1 и l_1 являются номерами нулей $v_k(u)$ и $u_l(v)$, замененных в $\widehat{F}(u, v)$ комплексно-сопряженными значениями, а $I_1(u)$, $I_2(u)$, $I_3(v)$, $I_4(v)$ означают действительные функции комплексных переменных. Обсудим вытекающие из (8) и (9) возможные отличия $\widehat{f}(x, y)$ от $f(x, y)$.

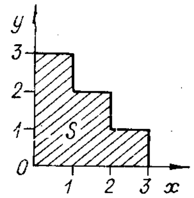
Пусть сначала $L_1 = K_1 = 0$. Тогда отличие $\widehat{F}(u, v)$ и $F(u, v)$ соответствует первому экспоненциальному множителю в (8) и (9). Так как (8) и (9) полностью равноправны, должно выполняться условие $I_1(u) + vI_2(u) = I_3(v) + uI_4(v)$. Следовательно, $I_1(u)$ и $I_3(v)$ — линейные функции своих переменных, а $I_2(u)$ и $I_4(v)$ — константы:

$$I_1(u) = a + ub,\ I_2(u) = c,\ I_3(v) = a + vc,\ I_4(v) = b. \qquad (10)$$

Формулы (10) соответствуют восстановлению с точностью до постоянного фазового множителя $\exp[ja]$ и линейного сдвига на $-b$ и $-c$ по координатам x и y соответственно.

Оценим влияние замены некоторых нулей в $\widehat{F}(u, v)$ их комплексно-сопряженными значениями в $F(u, v)$. Замена всех нулей их комплексно-сопряженными значениями эквивалентна замене $F(u, v)$ на $\overset{*}{F}(u, v)$ (без учета линейного сдвига $f(x, y)$ и постоянного фазового множителя), т. е.

условию $\hat{f}(x, y) = \overset{*}{f}(-x, -y)$, что не препятствует однозначному восстановлению. (Случай $\operatorname{Im} v_k(u) = \operatorname{Im} u_l(v) = 0$ для всех k, l означает симметрию $f(x, y) = \overset{*}{f}(-x, -y)$.) Замена части нулей их комплексно-сопряженными значениями может привести к неоднозначному восстановлению $f(x, y)$, так как в плоскости x, y это означает замену одной из функций, составляющих свертку $f(x, y)$, ее зеркальным отображением. При жесткой функциональной зависимости всех нулей друг от друга такая замена невозможна.



Таким образом, для однозначного восстановления двумерных пространственно-ограниченных непрерывных сигналов достаточно выполнения одного из трех условий:

1) сигнал не может быть представлен в виде свертки двух или более сигналов (пространственно-ограниченных, но не точечных);

2) спектр сигнала не разлагается в произведение двух или более целых функций;

3) все нули в спектре сигнала функционально связаны.

В [2] рассмотрен частный случай, когда один из сомножителей в спектре сигнала — многочлен переменных u, v (частный случай целой функции).

Найденные условия не являются необходимыми. Так, например, если сигнал представим как свертка двух сигналов

$$f(x, y) = f_1(x, y) \otimes f_2(x, y)$$

и хотя бы для одного из них $f_2(x, y)$ выполняется $f_2(x, y) = \overset{*}{f}_2(-x, -y)$, а другой $f_1(x, y)$ удовлетворяет указанным условиям, то и сигнал $f(x, y)$ может быть однозначно восстановлен по амплитудному спектру.

Очевидно также, что при нарушении указанных выше трех условий для однозначного восстановления сигнала необходимы какие-либо априорные сведения о сигнале, позволяющие выбрать единственное решение. Такими сведениями могут быть знание областей, где сигнал отличен от нуля, различные ограничения на действительную и мнимую части $f(x, y)$ (например, $\operatorname{Im} f(x, y) = 0$, $\operatorname{Re} f(x, y) \geqslant 0$) и т. п.

Для восстановления дискретных сигналов справедливы те же достаточные условия, что и для восстановления двумерных пространственно-ограниченных непрерывных сигналов; кроме того, условия 2, 3 могут быть распространены на случай двумерного z-преобразования сигнала, являющегося аналогом спектра для дискретных сигналов. Легко показать, что выполнение условий 2 и 3 для z-преобразования не гарантирует выполнения этих же условий для спектра. Подчеркнем, что для одномерных сигналов перечисленные выше условия заведомо нарушаются.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенное. Пусть восстановлению подлежит сигнал, отличный от нуля в области S, указанной на рисунке:

$$f(x, y) = 1, \ (x, y) \in S. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что $f(x, y)$ может быть представлен в виде свертки двух сигналов (с точностью до линейного сдвига):

$$f(x, y) = g(x, y) \otimes h(x, y),$$

$$g(x, y) = \delta(x, y) + \delta(x-1, y) + \delta(x, y-1) + \delta(x-1, y-1) + \\ + \delta(x-2, y) + \delta(x, y-2), \ h(x, y) = \operatorname{rect}(x) \operatorname{rect}(y),$$

$$\delta(x, y) \text{ — дельта-функция}, \quad \operatorname{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2; \\ 0, & |t| \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Таким образом, достаточное условие 2 не выполняется. Однако функция $h(x, y)$ обладает симметрией $h(x, y) = \overset{*}{h}(-x, -y)$, и поэтому, как указано выше, возможность восстановления $f(x, y)$ определяется возможностью однозначного восстановления $g(x, y)$.

Спектр функции $g(x, y)$

$$G(u, v) = 1 + \exp[-ju] + \exp[-jv] + \exp[-j(u+v)] + \\ + \exp[-j2u] + \exp[-j2v].$$

Определим в соответствии с (1) нули $v_k(u)$ спектра $G(u, v)$:

$$v_k(u) = j \ln\{-0{,}5[1 + \exp(-ju) \pm \sqrt{-(3 + 2\exp(-ju) + 3\exp(-j2u))}]\} + \\ + 2\pi k; \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots. \tag{12}$$

Каждому k соответствуют в (12) два нуля. Аналогично

$$u_l(v) = j \ln\{-0{,}5[1 + \exp(-jv) \pm \sqrt{-(3 + 2\exp(-jv) + 3\exp(-j2v))}]\} + \\ + 2\pi l; \quad l = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots. \tag{13}$$

Легко видеть, что функции (12) и (13), представляющие нули $G(u, v)$, функционально связаны друг с другом, т. е., зная лишь одну функцию этого счетного множества, можно определить все множество. Таким образом, условие 3 для функции $g(x, y)$ выполняется; это означает, что $f(x, y)$ (11) может быть однозначно восстановлена по амплитудному спектру.

Заметим, что анализ, проведенный для этого примера, в общем случае выполнить аналитически достаточно трудно или невозможно. Необходимо отметить жесткость полученных достаточных условий на сигнал, его спектр и нули спектра. Например, представление двумерного сигнала в виде свертки в случае, когда значения $f(x, y)$ и область S, где он отличен от нуля, задаются случайным образом, является весьма маловероятным. В этом смысле рассмотренный сигнал (11), скорее, исключение, как и другие сигналы, сформированные специально в иллюстративных целях [2, 3], для которых найденные условия не выполняются. Жесткость сформулированных условий косвенно подтверждается тем, что для дискретных сигналов теоретически [1, 3, 7] и для частных, но практически важных случаев экспериментально [6] показана высокая вероятность однозначного восстановления сигнала по амплитудному спектру (или автокорреляции).

Таким образом, следует ожидать, что двумерные непрерывные пространственно-ограниченные сигналы в большинстве случаев могут быть однозначно восстановлены по амплитудному спектру или автокорреляционной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bruck Yu. M., Sodin L. G.** On the ambiguity of the image reconstruction problem.— Opt. Comm., 1979, vol. 30, N 3, p. 304—308.
2. **Huisser A. M. J., van Toorn P.** Ambiguity of the phase — reconstruction problem.— Opt. Lett., 1980, vol. 5, N 11, p. 499—501.
3. **Бакалов В. П.** О возможности восстановления многомерных дискретных сигналов по амплитудному спектру.— Радиотехника, 1982, № 11.
4. **Ронкин Л. И.** Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Наука, 1971.
5. **Walter A.** The question of phase retrieval in optics.— Optica Acta, 1963, vol. 10, p. 41—49.
6. **Fienup J. R.** Phase retrieval algorithms: a comparison.— Appl. Opt., 1982, vol. 21, N 15, p. 2758—2769.
7. **Monson H. Hayes.** The reconstruction of a multidimensional sequece from the phase or magnitude of its Fourier transform.— IEEE. Trans., 1982, vol. ASSR-30, p. 140—154.

Поступила в редакцию 30 марта 1983 г.