УДК 519.24

Л. И. ЖАДАН
(Томск)

К ПРОЦЕДУРЕ ИСКЛЮЧЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение. Известно, что реальные промышленные, научные, медицинские данные содержат до 10% аномальных измерений [1]. В работах [2, 3] при обработке измерений использовалась эвристическая процедура исключения аномальных измерений. В данной статье под аномальными измерениями понимаются измерения, для которых неизвестно математическое ожидание помехи. В [4] для случая булевой матрицы измерений показана оптимальность процедуры исключения аномальных измерений с неизвестным математическим ожиданием помехи. В данной работе доказывается оптимальность этой процедуры для общего случая, когда матрица измерения необязательно булева, и исследуется точность оценивания при исключении аномальных измерений, содержащих помехи с неизвестным математическим ожиданием. Процедура исключения аномальных измерений оптимальна в том плане, что дает наилучшую в среднеквадратическом смысле оценку в классе линейных оценок, удовлетворяющих условию, которое является достаточным для несмещенности.

Постановка задачи 1. Рассматривается дискретная система, нормальное функционирование которой описывается уравнениями

$$x(k+1)=\Phi(k)x(k)+G(k)w(k),\quad k=0,\,1,\,\ldots,\tag{1}$$

$$z_0(k)=H_0(k)x(k)+v(k),\tag{2}$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы, $z_0(k)$ — m-мерный вектор измерений, $\Phi(k)$ — переходная матрица системы размерностью $(n\times n)$, $H_0(k)$ — матрица измерения размерностью $(m\times n)$ и $G(k)$ — матрица возмущений размерностью $(n\times q)$, а $w(k)$ и $v(k)$ — q-мерный гауссов вектор возмущений объекта и m-мерный гауссов вектор ошибок измерений (регулярных помех) с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами ковариаций $Q(k)$ и $R_0(k)$ соответственно. Согласно [5] оптимальная в среднеквадратическом смысле (ОСКС) оценка $\hat{x}(k)$ вектора $x(k)$ определяется фильтром Калмана с матрицами $H_0(k)$ и $R_0(k)$. Если по $r(1\leqslant r\leqslant m)$ компонентам $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r$ вектора измерений действуют аномальные помехи (помехи, математическое ожидание которых неизвестно), то согласно эвристической процедуре исключения аномальных измерений в устройстве оценивания используется $(m-n)$-мерный вектор измерений $z(k)$, который образуется из вектора $z_0(k)$ исключением $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r$ компонент. В этом случае $\hat{x}(k)$ задается фильтром Калмана:

$$\hat{x}(k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)[z(k)-H(k)\hat{x}(k|k-1)],\tag{3}$$

$$\hat{x}(k|k-1)=\Phi(k-1)\hat{x}(k-1),\quad x(0)=x_0,\tag{4}$$

$$K(k)=P(k|k-1)H^T(k)S^{-1}(k),\tag{5}$$

$$S(k)=H(k)P(k|k-1)H^T(k)+R(k),\tag{6}$$

$$P(k|k-1)=\Phi(k-1)P(k-1)\Phi^T(k-1)+ \\ +G(k-1)Q(k-1)G^T(k-1),\quad P(0)=P_0,\tag{7}$$

$$P(k)=[I_n-K(k)H(k)]P(k|k-1),\tag{8}$$

где I_n — единичная матрица размерностью $(n\times n)$, матрица $H(k)$ размерностью $(m-r)\times n$ получается из матрицы $H_0(k)$ вычеркиванием строк с номерами $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r$, а матрица ковариаций $R(k)$ размерностью

$(m-r)\times(m-r)$ — из матрицы $R_0(k)$ вычеркиванием r строк и r столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$. При $r=m$ вектор измерений не используется и оценка строится только по априорной информации.

Задача 1. Доказать оптимальность процедуры исключения аномальных измерений для общего случая, когда матрица измерения $H_0(k)$ вещественная.

Решение задачи 1. В работе [6] для системы (1) с аномальными из-

определяет структуру воздействия компонент аномальной помехи $f(k)$ на компоненты вектора $z(k)$ и принадлежит множеству $C_{m\times r}$ (0, 1) булевых матриц, у которых единица стоит в 1-м столбце на i_1-м месте, во 2-м — на i_2-м месте, в r-м — на i_r-м месте. Таким образом, по построению C — матрица с линейно независимыми столбцами. Согласно [7] для таких матриц выполняется равенство $C^+C=I$ (C^+ — псевдообратная матрица к C).

В [6] приводится решение задачи синтеза оценки $\hat{x}(k)$, которая является несмещенной при неизвестном $\bar{f}(k)$ и ОСКС в классе линейных оценок, т. е. минимизирует функционал

$$M\{[x(k)-\hat{x}(k)]^T[x(k)-\hat{x}(k)]\}\to\min_{\hat{x}(k)}. \tag{9а}$$

Согласно [6] такую оценку можно построить, если искать ее в классе линейных оценок, имеющих структуру вида

$$\hat{x}(k)=\Phi(k-1)\hat{x}(k-1)+K_1(k)[I_m-C(k)W(k)]\tilde{\bar{z}}(k), \tag{9б}$$

где m-мерный вектор $\tilde{\bar{z}}(k)=\bar{z}(k)-H_0(k)\Phi(k-1)\hat{x}(k-1)$, $W(k)$ выбирается из достаточного условия несмещенности

$$[I_m-C(k)W(k)]C(k)=0, \tag{9в}$$

а матрица $K_1(k)$ находится из условия (9а). Такое ограничение на структуру оценки $\hat{x}(k)$ дает возможность иметь на каждом шаге k несмещенную оценку $\hat{x}(k)$ при неизвестном $\bar{f}(k)$. Другими словами, платой за незнание $\bar{f}(k)$ является ограничение структуры оценки $\hat{x}(k)$ вида (9б). Покажем, что (9в) эквивалентно условию

$$W(k)C(k)=I. \tag{9г}$$

Действительно, так как в (9в) $C\in C_{m\times r}$ (0, 1) и $C^+C=I$, то согласно [7] уравнение (9в) имеет решение и $W(k)=C^+(k)+M-MCC^+(k)$, где M — произвольная матрица. Следовательно, $WC=I$ для любой матрицы $M(C(k)W(k)\neq I$, поскольку $CC^+\neq I)$, а из $WC=I$ вытекает, что $C(k)=C(k)W(k)C(k)$. Полученный фильтр, удовлетворяющий достаточному условию несмещенности (9г) и являющийся ОСКС в классе линейных оценок $\hat{x}(k)$ со структурой вида (9б), описывается уравнениями

$$\hat{x}(k)=\Phi(k-1)\hat{x}(k-1)+K_1(k)[\bar{z}(k)-H_0(k)\Phi(k-1)\hat{x}(k-1)], \tag{10}$$

$$\tilde{K}_1(k)=\bar{P}(k|k-1)H_0^T(k)\bar{S}_1^{-1}(k)\left[I_m-C(k)V_1(k)C^T(k)\bar{S}_1^{-1}(k)\right], \tag{11}$$

$$\bar{S}_1(k)=\bar{S}(k)+C(k)\Gamma(k)C^T(k), \tag{12}$$

$$\bar{S}(k)=H_0(k)\bar{P}(k|k-1)H_0^T(k)+R_0(k), \tag{13}$$

$$V_1(k)=\left[C^T(k)\bar{S}_1^{-1}(k)C(k)\right]^{-1}, \tag{14}$$

$$\bar{P}(k|k-1)=\Phi(k-1)P(k-1)\Phi^T(k-1)+G(k-1)Q(k-1)G^T(k-1), \tag{15}$$

$$P(k)=[I_n-\tilde{K}_1(k)H_0(k)]\bar{P}(k|k-1). \tag{16}$$

Теорема 1. Фильтры (3)—(8) и (10)—(16) эквивалентны.

Для доказательства теоремы необходимо установить, что

$$P(k\,|\,k-1)\,H^T(k)\,S^{-1}(k)\,\tilde z(k) = \bar P(k\,|\,k-1)\,H_0^T(k)\,\bar S_1^{-1}(k)\times$$
$$\times\left[I_m - C(k)\left(C^T(k)\,\bar S_1^{-1}(k)\,C(k)\right)^{-1}C^T(k)\,\bar S_1^{-1}(k)\right]\tilde{\tilde z}(k), \qquad (17)$$

где $\tilde z(k) = z(k) - H(k)\Phi(k-1)\hat x(k-1)$. Так как для первого момента времени k действия аномальной помехи $P(k|k-1) = \bar P(k|k-1)$, то (17) (для простоты опускаем временной параметр k) перепишем в виде

$$H^T S^{-1}\tilde z = H_0^T \bar S_1^{-1}\left[I_m - C\left(C^T\bar S_1^{-1}C\right)^{-1}C^T\bar S_1^{-1}\right]\tilde{\tilde z}. \qquad (18)$$

Введем в рассмотрение булеву $(m-r)\times m$-матрицу преобразования E, которая получается из единичной матрицы I_m вычеркиванием строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Тогда приходим к следующим соотношениям: $EC=0$, $EH_0=H$, $S^{-1}=(E\bar S E^T)^{-1}$, $\tilde z = E\tilde{\tilde z}$. С учетом трех последних соотношений вместо (18) необходимо доказать, что

$$H_0^T E\left(E\bar S E^T\right)^{-1}E = H_0^T\bar S_1^{-1}\left[I_m - C\left(C^T\bar S_1^{-1}C\right)^{-1}C^T\bar S_1^{-1}\right]. \qquad (19)$$

В силу равенства [4]

$$\bar S_1^{-1} - \bar S_1^{-1}C\left(C^T\bar S_1^{-1}C\right)^{-1}C^T\bar S_1^{-1} = \bar S_1^{-1} - \bar S^{-1}C\left(C^T\bar S_1^{-1}C\right)^{-1}C^T\bar S^{-1} \qquad (20)$$

(19) перепишем в виде

$$H_0^T\bar S^{-1}\left[\bar S E^T\left(E\bar S E^T\right)^{-1}E + C\left(C^T\bar S^{-1}C\right)^{-1}C^T\bar S^{-1}\right] = H_0^T\bar S^{-1}. \qquad (21)$$

Введем обозначения:

$$M = C(C^T\bar S^{-1}C)^{-1}C^T\bar S^{-1}, \quad \bar M = \bar S E^T(E\bar S E^T)^{-1}E. \qquad (22)$$

Для произвольных матриц A и B согласно [7]

$$\mathrm{rk}\,[AB] = \mathrm{rk}\,[A^+AB] = \mathrm{rk}\,[ABB^+] \qquad (23)$$

($\mathrm{rk}\,[\cdot]$ — ранг матрицы). Так как E — матрица с линейно независимыми строками, а C — с линейно независимыми столбцами, то $E^+E=I$, $C^+C=I_r$. Применяя (23) к M и $\bar M$, убеждаемся в том, что $rk[\bar M] = m-r$, $rk[M]=r$. Непосредственно показывается, что $\bar M$ и M являются проекционными матрицами [8], для которых $\bar M M = 0$, $M\bar M = 0$ и $\mathrm{rk}\,[\bar M] + \mathrm{rk}\,[M] = m$. Тогда по лемме 7.4 из [8] следует, что

$$\bar S E^T(E\bar S E^T)^{-1}E^T + C(C^T\bar S^{-1}C)^{-1}C^T\bar S^{-1} = I_m. \qquad (24)$$

Последнее доказывает справедливость (21).

Легко показать, что выполняется равенство

$$[I_n - K(k)H(k)]P(k|k-1) = [I_n - \bar K_1(k)H_0(k)]\bar P(k|k-1). \qquad (24а)$$

Действительно, так как $K(k)\tilde z(k) = \bar K_1(k)\tilde{\tilde z}(k)$, $\tilde z(k) = E(k)\tilde{\tilde z}(k)$, а $H(k) = E(k)H_0(k)$, то последовательно получим, что $K(k)E(k) = \bar K_1(k)$, $K(k)E(k)H_0(k) = \bar K_1(k)H_0(k)$, $K(k)H(k) = \bar K_1(k)H_0(k)$, и, таким образом, соотношение (24а) выполняется. Учитывая (7), (8), (15), (16) и (24а), находим, что $P(k+1|k) = \bar P(k+1|k)$. Повторяя преобразования, аналогичные приводимым выше, устанавливаем эквивалентность фильтров и и для момента времени $k+1$.

Теорема доказана.

Следствие. Уравнения фильтра (10)—(16) для случая $r \neq 0$ ($C \neq 0$) можно представить в более простом виде:

$$\widehat{x}(k) = \Phi(k-1)\widehat{x}(k-1) + \widetilde{K}_1(k)[\overline{z}(k) - H_0(k)\Phi(k-1)\widehat{x}(k-1)], \quad (25)$$

$$\widetilde{K}_1(k) = \overline{P}(k\,|\,k-1) H_0^T(k) E^T(k) \left(E(k)\overline{S}(k) E^T(k)\right)^{-1} E(k), \quad (26)$$

$$\overline{S}(k) = H_0(k)\overline{P}(k\,|\,k-1) H_0^T(k) + R_0(k), \quad (27)$$

$$\overline{P}(k|k-1) = \Phi(k-1)P(k-1)\Phi^T(k-1) + G(k-1)Q(k-1)G^T(k-1), \quad (28)$$

$$P(k) = [I_n - \widetilde{K}_1(k)H_0(k)]\overline{P}(k|k-1). \quad (29)$$

Доказательство. Используя в (11) равенство (20), имеем

$$\widetilde{K}_1(k) = \overline{P}(k\,|\,k-1) H_0^T(k)\overline{S}^{-1}(k)\left[I_m - C(k)\left(C^T(k)\overline{S}^{-1}(k)\,C(k)\right)^{-1} C^T(k)\overline{S}^{-1}(k)\right]. \quad (30)$$

Из (24) следует, что для случая $r \neq 0$ ($C \neq 0$)

$$I_m - C(k)(C^T(k)\overline{S}^{-1}(k)C(k))^{-1}C^T(k)\overline{S}^{-1}(k) =$$
$$= \overline{S}(k)E^T(k)(E(k)\overline{S}(k)E^T(k))^{-1}E(k). \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30), получим новое выражение для матриц передачи фильтра

$$\widetilde{K}_1(k) = \overline{P}(k\,|\,k-1) H_0^T(k) E^T(k)\left(E(k)\overline{S}(k) E^T(k)\right)^{-1} E(k). \quad (32)$$

Учитывая (32), уравнения (12)—(16) принимают вид (27)—(29), что и требовалось доказать.

Замечание. Фильтр (10)—(16) справедлив и в случае присутствия аномальной помехи $f(k)$ по всем компонентам вектора $z(k)$, когда $r = m$, а $C = I_m$. При этом фильтр вырождается в априорный, когда

$$\widehat{x}(k) = \Phi(k-1)\widehat{x}(k-1) \quad (\widetilde{K}_1(k) = 0). \quad (33)$$

Постановка задачи 2. Определим точность оценивания $J(k)$ при исключении аномальных измерений как среднее значение квадратичной формы $(x(k) - \widehat{x}(k))^T D(x(k) - \widehat{x}(k))$, т. е.

$$J(k) = \mathrm{tr}\,[DP(k)], \quad (34)$$

где $\mathrm{tr}\,[\cdot]$ — след матрицы, D — неотрицательно определённая $(n \times n)$-матрица ($D \geqslant 0$). Считаем, что аномальные помехи действуют по $i_1, i_2, \ldots, i_r$ компонентам вектора измерений. В силу эквивалентности фильтров (3)—(8) и (10)—(16) далее рассматривается фильтр (10)—(16). Под измерительным набором Iz^r будем понимать булев вектор размером m, в котором на $i_1, i_2, \ldots, i_r$ месте стоят нули, а соответствующую этому набору точность оценивания обозначим через $J_{Iz^r}(k)$.

Задача 2. Исследовать точность оценивания при исключении аномальных измерений.

Решение задачи 2. Теорема 2. Для измерительных наборов $Iz^0, Iz^1, \ldots, Iz^m$, последовательно отличающихся друг от друга значением лишь одной компоненты, точность оценивания (34) при $Q \geqslant 0$, $R_0 \geqslant 0$ и $P_0 \geqslant 0$ удовлетворяет неравенствам

$$J_{Iz^0}(k) \leqslant J_{Iz^1}(k) \leqslant \ldots \leqslant J_{Iz^m}(k). \quad (35)$$

Доказательство. Рассмотрим два измерительных набора Iz^{r_1} и Iz^{r_2} ($r_2 = r_1 + 1$, $1 \leqslant r_1 \leqslant m-1$, $2 \leqslant r_2 \leqslant m$), которые отличаются друг от друга значением лишь одной компоненты. Этим наборам соответствуют матрицы C_1 и C_2, причем $\mathrm{rk}\, C_i = r_i$, $i = 1, 2$. Пусть аномальная помеха $f(k)$ начинает действовать с момента времени k, тогда, используя (34),

(16) и (30), получим, что

$$\Delta J(k) = J_{Iz^{r_2}}(k) - J_{Iz^{r_1}}(k) = \operatorname{tr}\{D\overline{P}(k|k-1)H_0^T(k)\overline{S}^{-1}(k)\times$$
$$\times\left(C_2\left(C_2^T\overline{S}^{-1}(k)C_2\right)^{-1}C_2^T - C_1\left(C_1^T\overline{S}_1^{-1}(k)C_1\right)^{-1}C_1^T\right)\overline{S}^{-1}(k)H_0(k)\overline{P}(k|k-1)\}. \quad (36)$$

Так как $\operatorname{tr}[AB] = \operatorname{tr}[BA]$ [9], то (36) перепишем в виде

$$\Delta J(k) = \operatorname{tr}\left[\left(\left(C_2\left(C_2^T\overline{S}^{-1}(k)C_2\right)^{-1}C_2^T - C_1\left(C_1^T\overline{S}^{-1}(k)C_1\right)^{-1}C_1^T\right)\overline{S}^{-1}(k)\right)\times\right.$$
$$\left.\times H_0(k)\overline{P}(k|k-1)D\overline{P}(k|k-1)H_0^T(k)\overline{S}^{-1}(k)\right]. \quad (37)$$

Поскольку $D \geqslant 0$ и $\overline{P}(k|k-1) \geqslant 0$ при $Q \geqslant 0$, $R_0 > 0$, $P_0 \geqslant 0$ [10], то симметрическая матрица $L_1(k)$ также будет неотрицательно определенной [10], т. е.

$$L_1(k) = H_0(k)\overline{P}(k|k-1)D\overline{P}(k|k-1)H_0^T(k) \geqslant 0. \quad (38)$$

Теперь рассмотрим выражение

$$L(k) = C_2\left(C_2^T\overline{S}^{-1}(k)C_2\right)^{-1}C_2^T\overline{S}^{-1}(k) - C_1\left(C_1^T\overline{S}^{-1}(k)C_1\right)^{-1}C_1^T\overline{S}^{-1}(k). \quad (39)$$

Из (24) следует, что

$$C_2\left(C_2^T\overline{S}^{-1}(k)C_2\right)^{-1}C_2^T\overline{S}^{-1}(k) = I_m - \overline{S}(k)E_2^T\left(E_2\overline{S}(k)E_2^T\right)^{-1}E_2, \quad (40)$$

где $(m-r_2)\times m$-матрица преобразования E_2 получается из единичной матрицы I_m вычеркиванием строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Легко убедиться, что для любых двух наборов Iz^{r_2} и Iz^{r_1}, отличающихся друг от друга значением лишь одной компоненты, выполняется равенство

$$E_2C_1 = 0. \quad (41)$$

Учитывая (40), выражение (39) преобразуется к виду

$$L(k) = I_m - \left[\overline{S}(k)E_2\left(E_2\overline{S}(k)E_2^T\right)^{-1}E_2 + C_1\left(C_1^T\overline{S}^{-1}(k)C_1\right)^{-1}C_1^T\overline{S}^{-1}(k)\right]. \quad (42)$$

Введем обозначения (для простоты опустим параметр k):

$$M_1 = C_1\left(C_1^T\overline{S}^{-1}C_1\right)^{-1}C_1\overline{S}^{-1},\ \overline{M}_2 = \overline{S}E_2^T\left(E_2\overline{S}E_2\right)^{-1}E_2,\ M = M_1 + \overline{M}_2. \quad (43)$$

В силу (23) имеем, что $\operatorname{rk} M_1 = r_1$, $\operatorname{rk}\overline{M}_2 = m - r_2$. Непосредственно показывается, что M_1 и $\overline{M}_2$ — проекционные матрицы (ПМ), для которых $M_1\overline{M}_2 = 0$, $\overline{M}_2M_1 = 0$. В этом случае согласно лемме 7.3 из [8] выполняются следующие условия: M является ПМ, $\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} M_1 + \operatorname{rk}\overline{M}_2 = m - 1$. Матрица $L = I - M$ проекционная [8]. Для ПМ A справедливо равенство [11] $\operatorname{rk} A = \operatorname{tr} A$. Тогда $\operatorname{tr} M = \operatorname{rk} M = m - 1$, а $\operatorname{rk} L = \operatorname{tr} L = 1$. Учитывая, что все собственные числа λ_i ПМ равны 1 либо 0 [12] и $\operatorname{tr} L = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$, определим множество собственных чисел матрицы L вида $L = \{1, 0, \ldots, 0\}$. Поскольку $\lambda_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, то [12] $L \geqslant 0$. С учетом (37) и обозначения $L_2 = LL_1$ имеем

$$\Delta J = \operatorname{tr} L_2\overline{S}^{-1} = J_{Iz^{r_2}} - J_{Iz^{r_1}} \geqslant 0,\quad 1 \leqslant r_1 \leqslant m-1,\quad 2 \leqslant r_2 \leqslant m, \quad (44)$$

так как $L_2 \geqslant 0$, $\overline{S}_1^{-1} > 0$ [13, 14]. При отсутствии аномальных измерений ($Iz^0 = [1, \ldots, 1]$) ОСКС-оценка вырабатывается фильтром Калмана с матрицей передачи $K_1(k) = \overline{P}(k|k-1)H_0^T(k)\overline{S}^{-1}(k)$ и $P(k) = [I_n - K_1(k)H_0(k)]\overline{P}(k|k-1)$. Тогда, учитывая последние уравнения и (29)—(30),

$$J_{Iz^1}(k) - J_{Iz^0}(k) = \operatorname{tr}\{D\overline{P}(k|k-1)H_0^T(k)\overline{S}^{-1}(k)C_1\left(C_1^T\overline{S}^{-1}(k)C_1(k)\right)^{-1}\times$$
$$\times C_1^T\overline{S}^{-1}(k)H_0(k)\overline{P}(k|k-1)\} \geqslant 0. \quad (45)$$

Из (44), (45) следует, что

$$J_{Iz^0}(k) \leqslant J_{Iz^1}(k) \leqslant \ldots \leqslant J_{Iz^m}(k). \tag{46}$$

Легко показать, что неравенства (46) выполняются и для следующего момента времени $k+1$. Пусть согласно (13), (15), (16) матрицам $\bar{P}(k+1|k)$, $P(k+1)$, $\bar{S}(k+1)$ при C_1 и C_2 соответствуют матрицы $\bar{P}_i(k+1|k)$, $P_i(k+1)$, $\bar{S}_{[i]}(k+1)$, $i=1, 2$. Учитывая в (15), что $P_2(k) \geqslant P_1(k)$, получим $\bar{P}_2(k+1|k) \geqslant \bar{P}_1(k+1|k)$. Тогда матрицу $\bar{P}_2(k+1|k)$ можно представить в виде

$$\bar{P}_2(k+1|k) = \bar{P}_1(k+1|k) + \Delta P(k+1|k), \tag{47}$$

где $\Delta P(k+1|k) \geqslant 0$. С учетом (16), (30) и (47) найдем точность оценивания для момента времени $k+1$:

[illegible]

$$\times \Delta P(k+1\,|\,k)\, H_0^T(k+1).$$

Поэтому

$$\Delta J(k+1) = J_{Iz^{r_2}}(k+1) - J_{Iz^{r_1}}(k+1) = \mathrm{tr}\{D(\Delta P(k+1\,|\,k) - A_2(k+1) + A_1(k+1))\}. \tag{49}$$

Так как $P_i(k+1) \geqslant 0$, $i=1, 2$, то после ряда простых преобразований приходим к соотношению $\Delta P(k+1|k) - A_2(k+1) + A_1(k+1) \geqslant 0$. Тогда из (49) следует:

$$J_{Iz^0}(k+1) \leqslant J_{Iz^1}(k+1) \leqslant \ldots \leqslant J_{Iz^m}(k+1),$$

что и требовалось доказать.

Эти результаты можно использовать при решении задачи выделения из всего множества наборов $Z=\{Iz^i,\ i=1,\ m\}$ тех из них, для которых достигается заданная точность оценивания J^*. Сначала выписываются уравнения (3)—(8) (или (10)—(16), (25)—(29)) для всех наборов Iz^1, содержащих по одному нулю (предполагается, что $J_{Iz^0}(k) < J^*$). Если для какого-либо из этих наборов $J_{Iz^1_l} > J^*$, то для всех наборов Iz_l^2, Iz_l^3, ..., Iz_l^{m-1}, последовательно отличающихся друг от друга значением лишь одной компоненты, в дальнейшем нет необходимости вычислять уравнения фильтра. Для наборов Iz^2, Iz^3, ..., Iz^{m-1} повторяется аналогичная процедура. Таким образом, использование (35) позволяет перейти от полного перебора всех вариантов к усеченному.

Для стационарной линейной системы при решении задачи выделения наборов, точность оценивания которых не превышает заданную точность J^*, на первом этапе можно использовать проверку полной наблюдаемости и управляемости [15]:

$$\mathrm{rk}\,[H^T, (H\Phi)^T, \ldots, (H\Phi^{n-1})^T] = n,\ \mathrm{rk}\,[G, \Phi G, \ldots, \Phi^{n-1}G] = n,$$

а на втором этапе — неравенства (35).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов А. А.** Стабильные методы оценки параметров.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 8.
2. **Киричук В. С., Луценко Б. Н.** Исключение недостоверных данных.— Автометрия, 1970, № 6.
3. **Зелененький П. П.** Применение методов теории статистических решений при исключении аномальных измерений.— Техн. кибернетика, 1969, № 2.

4. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Об оптимальности процедуры исключения аномальных измерений.— Автометрия, 1983, № 4.
5. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Энергия, 1973.
6. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Синтез и анализ оптимального алгоритма фильтрации для дискретных сигналов с аномальными помехами.— Радиотехника и электроника, 1984, т. XXIX, № 2.
7. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.— М.: Наука, 1977.
8. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем.— М.: Наука, 1973.
9. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств.— М.: Наука, 1972.
10. **Ройтенберг Я. Н.** Автоматическое управление.— М.: Наука, 1978.
11. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применения.— М.: Наука, 1968.
12. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1966.
13. **Ланкастер Т.** Теория матриц.— М.: Наука, 1982.

УДК 519.24

Б. М. ШУМИЛОВ

(Томск)

АЛГОРИТМ СЖАТИЯ ДАННЫХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОТЯЖЕННЫЕ ВЫБРОСЫ

В работах [1—5] привлекалось внимание к проблеме фильтрации данных, содержащих выбросы — быстрые и значительные флуктуации сигнала, обусловленные, например, случайными продолжительными и кратковременными неполадками в устройствах аналого-цифрового преобразования данных или в чисто цифровой части автоматизированной системы обработки данных. От одиночных либо k-кратных изолированных выбросов можно избавиться, используя алгоритм скользящей медианы [6]. Для случая протяженных выбросов общие методы фильтрации не разработаны. Ниже предлагается алгоритм фильтрации и сжатия данных кусочными многочленами первой степени, который дает возможность выявить начало и конец протяженного выброса, а при необходимости и избавиться от него.

Пусть в течение интервала времени $0 \leqslant t \leqslant T$ регистрируется некоторая функциональная зависимость, причем $f(t)$ есть величина сигнала, измеренная в момент времени t. В результате аналого-цифрового преобразования в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_N = T$ исходная непрерывная функция отображается в последовательность отсчетов $f(t_0)$, $f(t_1), \ldots, f(t_i), \ldots, f(t_N)$. Эта последовательность и вводится в ЭВМ. Обычно моменты t_i $(i = 1, \ldots, N)$ не запоминаются, потому что их выбирают равноотстоящими, т. е. $t_i = iT/N$. Частоту аналого-цифрового преобразования $F = N/T$ выбирают довольно большой (согласно теореме Котельникова), чтобы достаточно подробно отображать развитие во времени быстропротекающих процессов.

Будем считать, что реально измеряемые значения $f(t_i)$ представляют собой сумму детерминированного полезного сигнала $u(t_i)$ и случайной помехи $\xi(t_i)$, причем помеха состоит из белого гауссова шума с нулевым средним и постоянной дисперсией σ^2 и протяженных выбросов