

$$= (a_{m,n} - a_{m+1,n}) + i (a_{m,n+1} - a_{m+1,n+1}).$$

Данная операция клеточной логики представляет собой дифференциальный оператор вида

$$c'_{m,n} = |c^p_{m,n}|^2 = (a_{m,n} - a_{m+1,n})^2 + (a_{m,n+1} - a_{m+1,n+1})^2.$$

Расширение класса операций клеточной логики, реализуемых в КОП, достигается путем введения амплитудных, фазовых или комплексных пространственно-частотных фильтров в фурье-плоскость процессора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Престон К. и др. Основы клеточной логики с приложениями к обработке изображений в медицине.— ТИИЭР, 1979, т. 67, № 5.
2. Оптическая обработка информации/Под ред. Д. Кейсесента.— М.: Мир, 1980.

Поступило в редакцию 19 ноября 1982 г.

УДК 621.391.837 : 681.3

Д. В. ДОВНАР, К. Г. ПРЕДКО
(Могилев)

МЕТОД УСТРАНЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РАВНОМЕРНОГО СМАЗА ИЗОБРАЖЕНИЯ

Одной из актуальных практических задач коррекции изображений является задача устранения нерезкости, обусловленной равномерным прямолинейным движением (смазом) на величину $2a$. Трудности, возникающие при решении этой задачи, связаны с тем, что функция передачи модуляции в этом случае $T(\omega) = \sin a\omega/a\omega$ принимает нулевые значения на дискретном множестве пространственных частот $\omega_k = k\pi/a$, $k = 1, 2, \dots$. Это приводит к неединственности решения, поскольку $z(x) = \sum_k b_k e^{i\omega_k x}$ ($z(x)$ — неискаженный объект, b_k — произвольные численные коэффициенты) также является решением. В случае устранения нерезкости методом инверсной фильтрации корректирующий инверсный фильтр $Y(\omega) = a\omega/\sin a\omega$ принимает бесконечные значения на множестве частот $\omega_k = k\pi/a$, что значительно затрудняет его численное аппроксимирование [1, с. 140]. Чтобы устранить эту трудность, разработаны методы дифференцирования изображения [1, с. 143] и свертки с маской Сунделла [2, с. 215]. Однако корректирующие функции размытия точки (КФРТ), соответствующие оператору однократного дифференцирования или маске Сунделла, не являются четными. Поэтому результатом коррекции изображений этими методами будет разность двух сдвинутых объектов повышенной резкости.

Цель данной работы — получение четных и не имеющих особых точек КФРТ, в результате применения которых получался бы единственный объект повышенной резкости.

Предлагаемый метод есть реализация метода инверсной фильтрации в области координат путем представления корректирующего фильтра рядом функций, фурье-спектр которых не имеет особых точек.

Как показано в [3, с. 56], функцию $\sin^{-1} y$ можно представить в виде

$$\sin^{-1} y = y^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [1/(y - n\pi) + 1/(y + n\pi)]. \quad (1)$$

Умножив (1) на y и выполнив преобразования под знаком суммы, получим

$$a\omega/\sin a\omega = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [1 + (n\pi/a)^2/(\omega^2 - (n\pi/a)^2)], \quad (2)$$

где $\omega = y/a$ — круговая пространственная частота.

Рассмотрим усеченный ряд

$$Y_L(\omega) = 1 + 2 \sum_{n=1}^L (-1)^n [1 + (n\pi/a)^2/(\omega^2 - (n\pi/a)^2)] \quad (3)$$

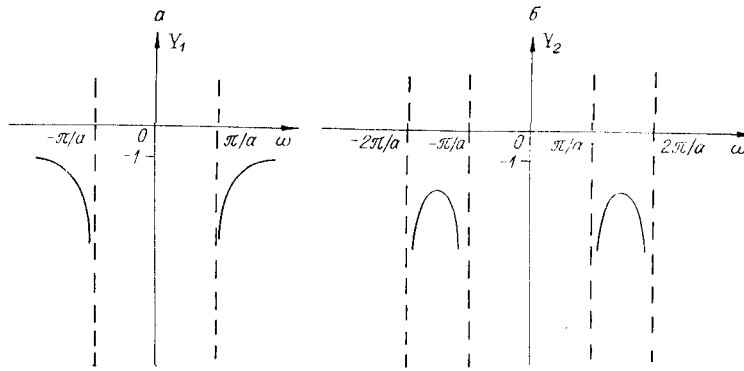


Рис. 1.

с точки зрения использования его в качестве корректирующего фильтра Y_L . На рис. 1 показаны корректирующие фильтры Y_1 и Y_2 . Как видно из рис. 1, а, при коррекции в области частот $|\omega| > \pi/a$ корректирующий фильтр Y_1 быстро стремится к -1 при $|\omega| \rightarrow \infty$, в области $|\omega| > 2\pi/a$ фильтр Y_2 — к $+1$ (рис. 1, б) и, очевидно, Y_L в области $|\omega| > L\pi/a$ — к $(-1)^L$. Полоса частот от $-L\pi/a$ до $L\pi/a$ соответствует оптимальной полосе в методе инверсной фильтрации [2].

Если умножить спектр изображения на корректирующий фильтр Y_L и выполнить обратное преобразование Фурье, получим

$$z_L(x) = (-1)^L f(x) + \int_{-c}^c \left[\sum_{n=1}^L (-1)^{n+1} (n\pi/a) \sin(n\pi |x - \tau|/a) \right] f(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Здесь $z_L(x)$ — результат коррекции изображения $f(x)$; $2c$ — размер изображения; L — регуляризирующее целое число, определяющее область частот, в которой проводится коррекция изображения.

Численные расчеты показали, что коррекция по формуле (4) приводит к значительным ошибкам на плоских участках объекта. Это обусловлено тем, что корректирующий фильтр Y_L не стремится к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$ и остающиеся нескорректированные частоты изображения вносят заметный вклад в результат коррекции. Простейшая возможность избавиться от этого влияния — использовать в качестве корректирующего фильтра полусумму $\Phi_L = (Y_L + Y_{L+1})/2$. Тогда формула коррекции примет вид

$$z_L(x) = \int_{-c}^c \left[\sum_{n=1}^L (-1)^{n+1} (n\pi/a) \sin(n\pi |x - \tau|/a) + \right. \\ \left. + ((-1)^{L/2}) ((L+1)\pi/a) \sin((L+1)\pi |x - \tau|/a) \right] f(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Функция, заключенная в квадратные скобки в формуле (5), — искомая КФРТ. Очевидно, что она четная и не имеет особых точек при конечном L .

Найденная КФРТ является реализацией инверсного фильтра Φ_L в области координат и может быть выполнена маской

$$\varphi_L(x) = \frac{(-1)^{L+1} \pi}{2a} \times \\ \times \left[\frac{(2L+1) \sin((2L+1)\pi |x|/2a) \cos(\pi x/2a) - \sin(\pi |x|/2a) \cos((2L+1)\pi x/2a)}{2 \cos^2(\pi x/2a)} - \right. \\ \left. - (L+1) \sin((L+1)\pi |x|/a) \right]. \quad (6)$$

Функция $\varphi_L(x)$ получена путем суммирования в (5) выражения в квадратных скобках.

Оценим ошибки, возникающие при применении указанного метода коррекции. Положим, что корректируемое изображение

$$f(\tau) = g(\tau) + \gamma(\tau).$$

Здесь $g(\tau)$ — незашумленное, искаженное сдвигом изображение, а $\gamma(\tau)$ — ошибка его регистрации и измерения, которую обычно называют шумом.

В силу линейности формулы (5) ошибку коррекции $e(x, L)$ можно разделить на две: $e(x, L) = e_z(x, L) + e_\gamma(x, L)$, где $e_z(x, L)$ — ошибка, связанная с объектом, а $e_\gamma(x, L)$ — с шумом, причем

$$e_\gamma(x, L) = \int_{-c}^c \varphi_L(x - \xi) \gamma(\xi) d\xi, \quad (7)$$

$$e_z(x, L) = \int_{-c}^c \varphi_L(x - \tau) \frac{1}{2a} \int_{\tau-a}^{\tau+a} z(\xi) d\xi d\tau - z(x). \quad (8)$$

Тогда, считая объект $z(\xi)$ и шум $\gamma(\xi)$ случайными функциями, определим средне-квадратичную ошибку на промежутке $(-c, c)$ в виде

$$e_c^2(L) = M \left\{ \int_{-c}^c [e_z(x, L) + e_\gamma(x, L)]^2 dx \right\},$$

$M\{\dots\}$ — среднее по множеству наблюдений [4, с. 585].

Используя (7) и (8), можно показать, что

$$\begin{aligned} e_c^2(L) &= \int_{-c}^c R_{zz}(x, x) dx - \frac{1}{a} \int_{-c}^c \int_{-c}^c \varphi_L(x - \tau) \int_{\tau-a}^{\tau+a} R_{zz}(\xi, x) d\xi d\tau dx + \\ &+ \frac{1}{4a^2} \int_{-c}^c \int_{-c}^c \left[\int_{-c}^c \varphi_L(x - \tau_1) \varphi_L(x - \tau_2) dx \right] \left[\int_{\tau_1-a}^{\tau_1+a} \int_{\tau_2-a}^{\tau_2+a} R_{zz}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \frac{1}{a} \int_{-c}^c \int_{-c}^c \left[\int_{\tau-a}^{\tau+a} R_{z\gamma}(\xi, \eta) d\xi \right] \left[\int_{-c}^c \varphi_L(x - \tau) \varphi_L(x - \eta) dx \right] d\eta d\tau - \\ &- 2 \int_{-c}^c \int_{-c}^c \varphi_L(x - \eta) R_{z\gamma}(\eta, x) d\eta dx + \int_{-c}^c \int_{-c}^c R_{\gamma\gamma}(\xi, \eta) \left[\int_{-c}^c \varphi_L(x - \xi) \varphi_L(x - \eta) dx \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $R_{zz}(x, \xi) = M\{z(x)z(\xi)\}$ — автокорреляционная функция объекта, $R_{\gamma\gamma}(x, \xi) = M\{\gamma(x)\gamma(\xi)\}$ — автокорреляционная функция шума, $R_{z\gamma}(x, \xi) = M\{z(x)\gamma(\xi)\}$ — взаимная корреляционная функция объекта и шума [4, с. 585–587].

Если известны корреляционные функции случайных объекта и шума, то из выражения для $e_c^2(L)$ можно определить оптимальный параметр регуляризации L_0 , который минимизирует (9). Выражение (9) можно упростить, если считать, что шум имеет нулевое среднее и не коррелирован с объектом. Тогда

$$\begin{aligned} e_c^2(L) &= \int_{-\infty}^{\infty} M\{|Z(\omega)|^2\} \left[\frac{\sin a\omega}{a\omega} \Phi_L(\omega) - 1 \right]^2 d\omega + \\ &+ \int_{-c}^c \int_{-c}^c R_{\gamma\gamma}(\xi, \eta) \left[\int_{-c}^c \varphi_L(x - \xi) \varphi_L(x - \eta) dx \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь нами введена статистическая характеристика объекта $M\{|Z(\omega)|^2\}$, которую иногда называют энергетическим спектром [2, с. 196]. Для этого была использована теорема Парсеваля, а также тот факт, что для объектов, отличных от нуля только на отрезке $(-c + a, c - a)$, ошибка $e_z(x, L)$ вне отрезка $(-c, c)$ при любом L равна нулю, что следует из непосредственного анализа формулы коррекции (5). Конечно, выражение (10) удобнее для определения L_0 , чем выражение (9).

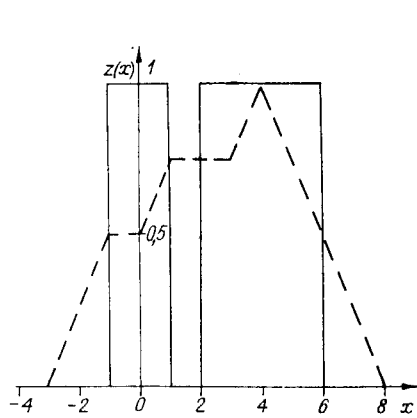


Рис. 2.

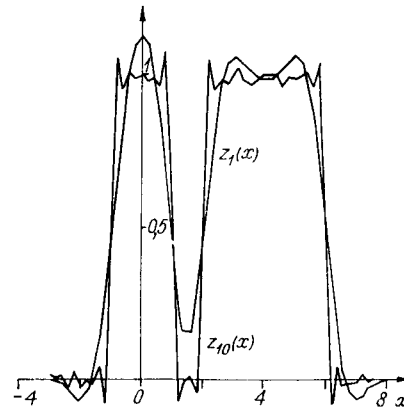


Рис. 3.

Отметим отличительную особенность предлагаемого метода. Спектр ошибки $e_z(x, L)$, связанной с объектом,

$$E_z(\omega, L) = Z(\omega) [(\sin a\omega/a\omega)\Phi_L(\omega) - 1]. \quad (11)$$

Аналитическая функция $(\sin a\omega/a\omega)\Phi_L(\omega)$ равна единице в устранимых особых точках $\omega_k = k\pi/a$, $k = 0, 1, 2, \dots, L$ [4, с. 207]. Следовательно, спектр ошибки равен нулю при $\omega = \omega_k$. Однако из-за наличия полюсов фильтра $\Phi_L(\omega)$ в точках ω_k , $k = 1, 2, \dots, L, L+1$, могут возникать специфические реакции на шум. Например, реакцией на постоянную составляющую шума в случае, если c кратно a , будет система полос с периодом $2a$. При фильтрации по Винеру в окрестностях частот ω_k , наоборот, ошибка, обусловленная шумом, исчезает, но возникает ошибка, связанная с объектом.

Для иллюстрации применения предлагаемого метода исходный объект $z(x)$, представляющий собой два единичных штриха, был размыт путем свертки с функцией $(1/4)\text{rect}(x/2)$. Результат размытия $f(x)$ показан на рис. 2 штриховой линией. Результаты коррекции изображения по формуле (5) при $L = 1$ и 10 представлены на рис. 3 55 точками, соединенными прямыми отрезками. Видно, что результаты коррекции гораздо лучше соответствуют исходному объекту $z(x)$, чем размытое изображение $f(x)$. При этом разделение штрихов улучшается с ростом L , что связано с увеличением полосы частот обработки, определяемой величиной L . Однако при $L = 10$ заметен некоррелированный шум, обусловленный неточностью счета интеграла по 100 точкам и укладывающийся в ошибку 5%. Если обрабатывается зашумленное изображение, то для уменьшения погрешностей обработки целесообразно использовать оптимальный параметр регуляризации L_0 , минимизирующий среднеквадратичную ошибку $e_c^2(L)$.

Итак, получено семейство четных корректирующих функций размытия точки, применение которых для коррекции смаза позволяет получить единственный объект повышенной резкости, а не разность смещенных объектов, как в случае применения метода дифференцирования или маски Суинделла. Поскольку предлагаемая корректирующая функция в области координат не имеет полюсов, то естественным образом исключаются трудности численного аппроксимирования частотного фильтра, существующие в методе инверсной фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сонджи М. М. Реставрация изображения: устранение пространственно-инвариантных искажений.— В кн.: Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин. М.: Мир, 1973.
2. Фриден Б. Улучшение и реставрация изображения.— В кн.: Обработка изображений и цифровая фильтрация. М.: Мир, 1979.
3. Толстов Г. П. Ряды Фурье.— М.: Наука, 1980.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10 июня 1982 г.;
окончательный вариант — 13 сентября 1983 г.