УДК 517.518.8 : 519.652 : 681.3.068

А. Ю. БЕЖАЕВ, В. А. ВАСИЛЕНКО, М. В. ЗЮЗИН,
А. В. КОВАЛКОВ, С. К. МАХКАМОВ, А. И. РОЖЕНКО
(Новосибирск)

БИБЛИОТЕКА ПРОГРАММ LIDA-2 ПО АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Библиотека программ LIDA-2 представляет собой мощный комплекс программ на языке Фортран для ЕС ЭВМ и БЭСМ-6, предназначенный для решения задач обработки экспериментальных данных (интерполирование, сглаживание, фильтрация сеточных функций одной и многих переменных). Библиотека состоит из 10 комплексов подпрограмм, решающих задачу определенного типа. Опишем возможности, которые предоставляет библиотека LIDA-2 (полное описание алгоритмов и программ библиотеки содержится в [1]).

Комплект ODD. Рассмотрим на вещественной оси неравномерную сетку $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant b$, в узлах которой заданы сеточные значения $r_1, r_2, \ldots, r_N$. Решением $\sigma(x)$ интерполяционной задачи

$$\sigma(x_i) = r_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad \int_a^b \sigma^{(p)^2} dx = \min, \quad p \geqslant 1,$$

является кусочно-полиномиальный сплайн степени $2p-1$ класса гладкости C^{2p-2} [2]. Такую же структуру имеет сглаживающий сплайн $\sigma_\alpha(x)$, доставляющий минимум функционалу

$$\Phi_\alpha(u) = \alpha \int_a^b u^{(p)^2} dx + \sum_{i=1}^N [u(x_i) - r_i]^2, \quad \alpha > 0.$$

Комплект ODD строит сплайны $\sigma(x)$ и $\sigma_\alpha(x)$ с помощью общего алгоритма Анселона — Лорана [2, 3]. Комплект в состоянии строить одновременно серию сплайнов на одинаковой сетке, но с разными сеточными значениями (к таким задачам редуцируются алгоритмы сплайн-аппроксимации на параллелепипедальных сетках в многомерном случае [2, 4]). Предусмотрен автоматический выбор параметра сглаживания α из критерия невязки [2, 5]:

$$\sum_{i=1}^N [\sigma_\alpha(x_i) - r_i]^2 = \varepsilon^2.$$

Если в узлах сетки заданы доверительные интервалы значений функции: $r_i^- \leqslant \sigma(x_i) \leqslant r_i^+$, то с помощью комплекта ODD можно решить задачу построения сплайна в выпуклом множестве [3, 6], нетривиальные узлы которого образуют новую информативную сетку; количество новых узлов может оказаться существенно меньше исходного количества измерений (задача сжатия информации).

Максимально возможная степень сплайнов равна 19 ($p = 10$).

Комплект EVEN. Комплект EVEN предназначен для построения интерполяционных и сглаживающих сплайнов на неравномерной сетке на отрезке при условии, что относительно функции заданы не ее значения в узлах, а средние интегральные значения по интервалам сетки. Именно решением $\sigma(x)$ интерполяционной задачи

$$\frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sigma(x)\, dx = r_k, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\int_a^b \sigma^{(p)^2}(x)\, dx = \min, \quad p \geqslant 0,$$

и задачи сглаживания $\sigma_\alpha(x)$, доставляющей минимум функционалу

$$\Phi_\alpha(u) = \alpha \int_a^b u^{(p)^2} dx + \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u dx - r_k \right]^2,$$

являются [2, 3] сплайны степени $2p$ гладкости C^{2p-1}. Для построения употребляется алгоритм Лорана — Анселона [2, 3]. Возможно одновременное решение серии задач интерполирования или сглаживания на одной сетке, но с разными значениями интегральных средних. Автоматический выбор параметра α проводится с помощью критерия невязки

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sigma_\alpha(x) dx - r_k \right]^2 = \varepsilon^2.$$

Комплект EVEN рекомендуется использовать при интерполяции зашумленных сеточных кривых, средние значения по группе измерений которых достовернее сеточных значений в узлах исходных измерений. Максимально возможная степень сплайна равна 20.

Комплект LSPL. Комплект LSPL предназначен для построения на отрезке с неравномерной сеткой кусочно-квазимногочленного восполнения (L-сплайна) сеточной функции. По желанию пользователя в число базисных функций сплайна на отрезке могут быть внесены достаточно произвольные полиномы, тригонометрические функции, соответствующие заданным частотам, экспоненты с заданными показателями возрастания или убывания. Точнее, если на отрезке $[a, b]$ задана сетка $a = x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_N = b$, сеточные значения $r_1, r_2, \ldots, r_N$ и

$$L = \sum_{k=0}^{Q} p_k D^k, \quad Q \geq 1, \quad p_Q \equiv 1$$

— дифференциальный оператор (D^k означает дифференцирование k-го порядка) с постоянными коэффициентами, то L-сплайн $\sigma(x)$, являющийся решением задачи

$$\sigma(x_k) = r_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad \int_a^b (L\sigma)^2 dx = \min,$$

представляет собой кусочно-квазимногочленную функцию класса C^{2Q-2}, составленную из базисных квазимногочленов, параметры которых определяются корнями характеристического уравнения оператора L^*L (подробнее см. [7]).

Для построения L-сплайна употребляются специальные локальные базисы [8]. Эти локальные функции представляют собой новый тип конечных элементов, которые могут быть употреблены при решении дифференциальных уравнений. Наряду с интерполянтом (L-сплайном), комплект LSPL генерирует и такие функции.

Комплект LSPL особенно эффективен при аппроксимации быстроменяющихся функций.

Комплект HERM. Комплект программ HERM предназначен для построения эрмитовых кусочно-полиномиальных интерполянтов одномерной сеточной функции, в узлах которой могут быть заданы производные до некоторого порядка [4]. Возможно, что информация разнородна в различных узлах. Например, в одном узле известны значения функции и ее второй производной, в другом — значения только первой производной и т. д.

Пусть на сетке $\Delta : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ заданы некоторые значения $f(x_j) = r_{0j}$ интерполируемой функции и производные (быть может, не все) $f^{(k)}(x_j) = r_{kj}$ до порядка не выше $p - 1$. Эрмитов сплайн на сетке

Δ представляет собой кусочно-полиномиальную функцию $\sigma(x)$ степени $2p-1$, отвечающую заданным интерполяционным условиям $\sigma^{(k)}(x_j)=r_{kj}$ и доставляющую минимум вариационному функционалу

$$J_p(\sigma)=\int\limits_a^b \sigma^{(p)^2}(x)\,dx.$$

Комплект наиболее эффективен при решении серии задач на одинаковых сетках с однотипной входной информацией. Это позволяет решать и двумерные интерполяционные задачи на прямоугольных сетках.

Комплект RATIO. Комплект программ RATIO предназначен для интерполирования сеточной функции, принимающей в узлах сетки конечные или бесконечные значения, с помощью дроби, числителем и знаменателем которой являются полиномиальные сплайны некоторых, в общем случае различных степеней [9]. Комплект рекомендуется для интерполирования функций, имеющих особенности типа полюсов.

Рассмотрим сетку $a=x_1<x_2<\ldots<x_N=b$, в узлах которой заданы величины $f_1, f_2, \ldots, f_N$, принимающие, наряду с конечными, бесконечные значения $\pm\infty$.

Приближение $\sigma(x)$ ищется в виде отношения полиномиальных сплайнов $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ степеней $2p-1$ и $2q-1$ соответственно,

$$\sigma(x)=\sigma_1(x)/\sigma_2(x),$$

из условий интерполяции

$$\sigma(x_i)=f_i$$

и минимизации функционала

$$\Theta\int\limits_a^b \sigma^{(p)^2}(x)\,dx+(1-\Theta)\int\limits_a^b \sigma^{(q)^2}(x)\,dx=\min.$$

Здесь Θ — некоторый весовой коэффициент.

Комплект APPREX. Комплект APPREX предназначен для построения квазиполиномиального восполнения сеточной функции одной переменной, заданной в узлах равномерной сетки. Квазиполиномом называется выражение

$$f(t)=\sum_{m=1}^{s}\sum_{l=0}^{k_m-1} a_{ml}t^l e^{z_m t},$$

где $s\geqslant 1$, $k_m\geqslant 1$ — целые и z_m — несовпадающие комплексные числа. Пусть в $z_1, z_2, \ldots, z_s$ содержатся только комплексно-сопряженные пары и числа k_i и k_j, отвечающие $z_i=\bar{z}_j$, равны. Тогда при вещественных a_{ml} и t квазиполином $f(t)$ принимает вещественные значения. Все коэффициенты в представлении $f(t)$ автоматически вычисляются с помощью комплекта на основе метода [10] с применением метода наименьших квадратов. Таким образом, наряду с вычислением приближения к сеточной функции, определяется ее «состав», в частности спектральный. Комплект особенно эффективен в сочетании с комплектами LSPL и AVERAGE.

Комплект GREEN. Комплект программ GREEN предназначен для построения достаточно гладких аппроксимаций функций n переменных, относительно которых в хаотически расположенных узлах ограниченной области Ω из R^n известны их значения, а также, может быть, значения первых и вторых производных по заданным направлениям. Обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_N$ интерполяционные узлы в Ω. Разобьем исходную совокупность номеров $I=\{1, 2, \ldots, N\}$ на три (возможно, пересекающиеся) группы: I_0, I_1, I_2. В узлах I_0 заданы значения функции $f(P_k)=r_k$, $k\in I_0$, в узлах I_1 — значения первой производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial\eta_k}(P_k)=r'_k$, $k\in I_1$. Наконец, в узлах I_2 известны величины вида $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_k^2}(P_k)=r''_k$, $k\in I_2$. Может оказаться, что группы I_1, I_2 пусты. Векторы ξ_k, η_k из R^n задают направления дифференцирования.

Введем в рассмотрение целое число $m \geqslant 1$ и определим вариационный функционал $J_m(f)$ формулой

$$J_m(f) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_\Omega (D^\alpha f)^2 \, d\Omega.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс, $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} f}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$. В простейшем случае ($n = m = 2$) функционал принимает вид

$$J_2(f) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} \right)^2 \right] d\Omega.$$

Такой функционал представляет собой потенциальную энергию упругой пластины, описываемой $f(t_1, t_2)$, и является обобщением для случая двух переменных функционала $\int_a^b (f'')^2 \, dx$, приводящего [2] к кубическим сплайнам.

Рассмотрим задачу построения интерполяционного сплайна [1, 2] $\sigma(P) = \sigma(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ из условий

$$\sigma(P_k) = r_k,\ k \in I_0;\ \frac{\partial \sigma}{\partial \eta_k}(P_k) = r'_k,\ k \in I_1;\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi_k^2}(P_k) = r''_k,\ k \in I_2;\ J_m(\sigma) = \min$$

и задачу о нахождении сглаживающего сплайна σ_R из условия

$$J_m(\sigma_R) + R_0 \sum_{k \in I_0} [\sigma_R(P_k) - r_k]^2 + R_1 \sum_{k \in I_1} \left[\frac{\partial \sigma_R}{\partial \eta_k}(P_k) - r'_k \right]^2 + R_2 \sum_{k \in I_2} \left[\frac{\partial^2 \sigma_R}{\partial \xi_k^2}(P_k) - r''_k \right]^2 = \min,$$

где $R_0, R_1, R_2 \geqslant 0$ — параметры сглаживания.

Решение этих задач находится с помощью функций Грина — фундаментального решения полигармонического уравнения [2, 11], а в программной реализации сводится к построению и обращению плотной матрицы размерностью, близкой к N.

В связи с этим максимальное множество интерполяционных узлов N, при котором можно решить задачу в оперативной памяти ЭВМ серии ЕС, не превышает 300. Возможен автоматический выбор параметра сглаживания по заданному среднеквадратичному уровню ошибки.

Комплект GREEN наиболее эффективен при решении серии задач на одной хаотической сетке, но с разными входными данными.

На рис. 1 изображено поле изолиний функции $\varphi_0(x, y) = 3x^2 \times \sin(5y + x) + 4(x - y)\cos(3x + 2y)$, на рис. 2 — поле изолиний сплайна, построенного по значениям φ_0 в узлах, обозначенных крестиками. Как видно из рисунков, поля практически не отличаются.

Комплект RAPAS. Комплект RAPAS предназначен для приближения функции многих переменных, заданной на хаотической сетке, обобщенной рациональной дробью.

Пусть на дискретном множестве точек $X = \{x_i \in R^k\}_{i=1}^N$ определены значения функции от k переменных $f(x) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})$. Зададим две базисные системы функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$ и $\psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)$. Обобщенной рациональной дробью называется отношение функций

$$R(x) = P(x)/Q(x),$$

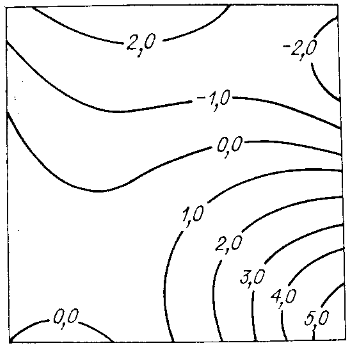

Рис. 1.

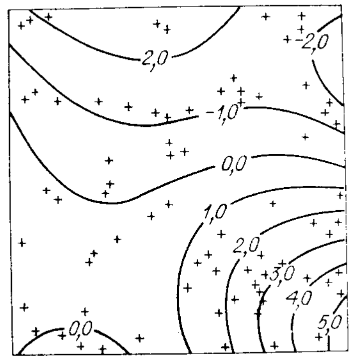

Рис. 2.

где

$$P(x)=\sum_{i=1}^{p} a_i\varphi_i(x),\quad Q(x)=\sum_{i=1}^{q} b_i\psi_i(x).$$

В случае одной переменной с базисной системой из мономов x^n функция $R(x)$ — классическая рациональная дробь.

Комплект строит обобщенную рациональную дробь $R^*(x)$, для которой величина

$$\Delta R=\max_{x\in X}|f(x)-R(x)|$$

достигает минимального значения среди дробей вида $R(x)$ таких, что $\forall x\in X$ и $Q(x)>0$.

Дробь R^* определяется последовательным решением задач линейного программирования. Процесс организован так, что размерность оптимизационных задач существенно меньше, чем в классических методах [12]. Это обеспечивает быструю сходимость к R^*.

Комплект FINEL. Комплект программ FINEL предназначен для решения задач интерполяции и сглаживания на хаотических сетках в многомерной области. При этом в отличие от комплекта GREEN используется метод конечных элементов с базисными функциями произвольной гладкости [13]. Построенное решение, как и прежде (см. комплект GREEN), минимизирует функционал энергии

$$\sum_{|\gamma|=m}\frac{m!}{\gamma!}\int_{\Omega}(D^{\gamma}u)^2\,d\Omega,$$

но в пространстве конечных элементов. Это позволяет получить кусочно-полиномиальные приближения к сложным аналитическим интерполянтам, вычисляемым с помощью комплекта GREEN, используя разреженные матрицы вместо плотных. Специальный метод упаковки матрицы в двумерный массив позволяет хранить только ненулевые элементы и организовать быструю процедуру умножения матрицы на вектор. Для решения такой системы комплект использует метод минимальных итераций Ланцоша.

При аппроксимации функции двух переменных комплект позволяет решать в оперативной памяти ЕС-1060 задачи более чем с 10^3 узлами.

Комплект AVERAGE. Комплект программ AVERAGE предназначен для обработки зашумленных экспериментальных сигналов [2, 14, 15]. Цель обработки — подавление помех и выделение информативной части сигнала, по возможности без ее искажения. Реализованы алгоритмы цифровой фильтрации, для которых исходными являются следующие предположения относительно полезной компоненты сигнала:

1) известны (хотя бы приближенно) информативные частоты тригонометрических функций, которые описывают сигнал, показатели роста или

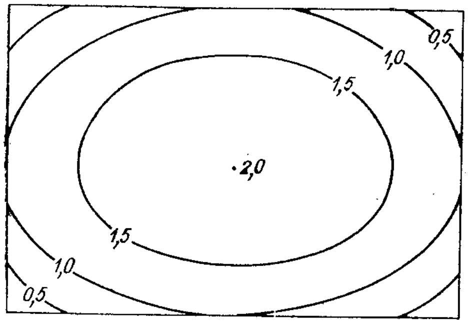

Рис. 3.

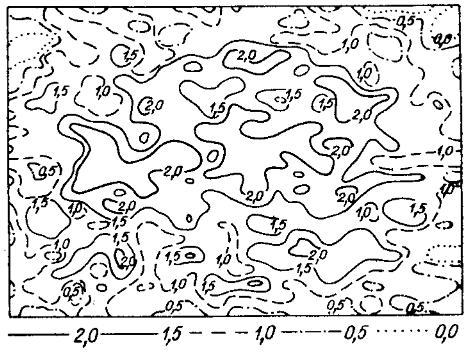

Рис. 4.

убывания экспонент, степени многочленов, параметры квазиполиномов (см. комплект APPREX);

2) сигнал близок по поведению к некоторому сплайну определенной гладкости, и приближенно известны его узлы [2, 4].

В этих условиях осуществляется осреднение сигнала $f(x)$ вида

$$\mathrm{K}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x, t)\, f(t)\, dt,$$

оставляющее, наряду с подавлением высокочастотных помех, без изменения заданное линейное пространство V квазимногочленов или сплайн-функций:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x, t)\, \varepsilon(t)\, dt = \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \in V.$$

При осреднении используются локальные и кусочно-постоянные по переменной t ядра $k(x, t)$, реализуемые рекуррентными соотношениями, позволяющими вести эффективную обработку сигнала в реальном времени.

Для построения фильтров рекомендуется предварительный анализ квазиполиномиального «состава» сигнала, осуществляемый комплектом APPREX.

Использование осреднений, сохраняющих сплайны, может оказаться эффективным и для предварительной обработки сигнала перед употреблением сплайн-аппроксимации (см. комплекты ODD, EVEN, HERM, LSPL).

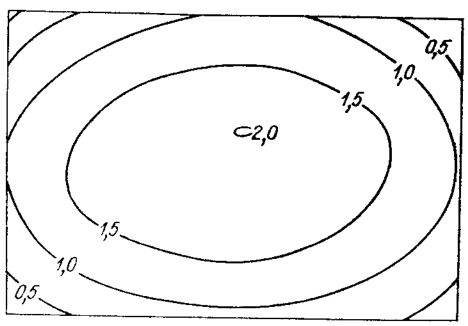

Рис. 5.

Приведем пример обработки двумерной функции. Пусть в области $[0,2] \times [0,1]$ на прямоугольной сетке 21×21 задана функция $f(x, y) = 2 - (x-1)^2 - (2y-1)^2$, зашумленная ошибками в интервале $[-1, 1]$. После обработки ее осреднением, сохраняющим параболические функции, интервал сократился до $[-0{,}1, 0{,}1]$. Поля изолинии функции $f(x, y)$, а также зашумленной и осредненной функций изображены соответственно на рис. 3—5.

В 1984 г. библиотека пополнилась комплектом программ быстрой обработки сигналов цифровыми фильтрами, имеющими заданное представление в частотной области (полосовые фильтры), и комплектом, предназначенным для аппроксимации функций сплайнами, сохраняющими их изогеометрические свойства (типа неотрицательности, монотонности, выпуклости функции).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Библиотека** программ LIDA-2 по аппроксимации функций и цифровой фильтрации: Оперативно-информ. материал.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
2. **Василенко В. А.** Сплайн–функции: Теория, алгоритмы, программы.— Новосибирск: Наука, 1983.
3. **Лоран П.-Ж.** Аппроксимация и оптимизация.— М.: Мир, 1975.
4. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.
5. **Гордонова В. Н., Морозов В. А.** Численные алгоритмы выбора параметра в методе регуляризации.— ЖВМиМФ, 1973, т. 13, № 3.
6. **Ковалков А. В.** Об одном алгоритме построения сплайнов с дискретными ограничениями типа неравенств.— Новосибирск, 1982. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, № 285).
7. **Schumaker L. L.** Spline functions: basic theory.— N. Y., 1981.
8. **Василенко В. А.** Локальные базисы в пространстве L-сплайнов.— В кн.: Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
9. **Роженко А. И.** Интерполяция рациональными сплайнами.— Новосибирск, 1983. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 430).
10. **Кондратьев В. П.** Приближение экспоненциальными суммами.— В кн.: Программы оптимизации (приближение функций). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1975, вып. 6.
11. **Ковалков А. В.** Функции Грина и сплайн-аппроксимации в многомерных областях.— Новосибирск, 1980. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 70).
12. **Петрак Л. В.** Приближение функций многих переменных рациональными дробями.— В кн.: Программы оптимизации (приближение функций). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1975, вып. 6.
13. **Бежаев А. Ю.** Оценки ошибки сплайн-интерполяции в многомерных ограниченных областях.— Новосибирск, 1983. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 102).
14. **Василенко В. А., Зюзин М. В.** Осредняющие операторы типа свертки и обработка экспериментальных кривых.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981.
15. **Зюзин М. В.** Осреднения, точные на полиномиальных сплайнах.— Новосибирск, 1981. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 89).

Поступила в редакцию 10 ноября 1983 г.

УДК 621.391.519.6

В. А. ВИТТИХ, Б. В. КАЛИНИН, В. А. ЦЫБАТОВ

(Куйбышев)

ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Введение. Непрерывное усложнение систем связи различной природы неизбежно ведет к увеличению удельного веса межэлементной сети связи в общем балансе материальных затрат, расходуемых на создание распределенной системы. Основные задачи синтеза сети связи заключаются в определении ее топологии и плана размещения. Топология сети характеризует структуру ее связей, а план размещения — расположение ее элементов в монтажном пространстве. Условия реального проектирования исключают возможность совместного решения указанных задач и предопределяют последовательно-итерационную методику проведения структурной и метрической оптимизации сети связи распределенной системы. Последним обстоятельством объясняется факт самостоятельной значимости указанных задач и необходимость их независимого рассмотрения. В данной статье обсуждается задача метрической оптимизации сети связи.

Постановка задачи. При оценке эффективности сети связи по величине ее обобщенной стоимости, массе и т. п. задача метрической оптимизации сводится к минимизации функционала, характеризующего суммарную величину взвешенных длин межэлементных линий связи. Классифи-