

4. Мирский Г. Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения.— М.: Энергоиздат, 1982.
5. Кендэл М. Ранговые корреляции.— М.: Статистика, 1975.
6. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики.— М.: Финансы и статистика, 1982.
7. Дубровский С. А. Прикладной многомерный статистический анализ.— М.: Финансы и статистика, 1982.

Поступила в редакцию 23 января 1984 г.

УДК 517.52 : 519.24

В. Я. КРАКОВСКИЙ, В. И. ЧАЙКОВСКИЙ  
(Киев)

## ОСОБЕННОСТИ СКОЛЬЗЯЩЕГО АНАЛИЗА СПЕКТРА

**Постановка задачи.** В системах спектральной обработки информации в ряде случаев необходимо обеспечить инвариантность анализа спектра  $F(p)$  к сдвигу исследуемого сигнала  $Y$ . Такой особенностью обладает цифровой анализатор скользящего спектра (ЦАСС) [1], реализующий рекуррентный алгоритм [2]

$$F_q(p) = [F_{q-1}(p) + (1/N)(Y_q - Y_{q-N})] W_N^p, \quad (1)$$

где  $W_N^p$  — принятое в теории дискретного преобразования Фурье (ДПФ) символическое представление вектора поворота  $\exp[j(2\pi/N)p]$ ,  $q$  — безразмерный индекс скольжения (номер последнего отсчета сигнала),  $N$  — размерность вектора наблюдения  $Y$ ,  $p$  — безразмерная частота анализа (номер гармоники). Алгоритм (1) на каждом шаге скольжения формирует сумму вида

$$F_q(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=q-N+1}^q Y_k W_N^{-p[k-(q-N+1)]}, \quad (2)$$

которая, по определению, является дискретным эквивалентом согласованного мгновенного спектра [3].

Цифровым анализаторам скользящего спектра, помимо характерных для традиционных процессоров преобразования Фурье погрешностей, свойственна специфическая составляющая, которую можно назвать погрешностью взвешивания. Выполненный в некоторых работах [2, 4] анализ такой погрешности показывает, что она неограниченно возрастает с увеличением числа шагов скольжения  $q$ . Это свидетельствует о неустойчивости скользящего анализа спектра и принципиально исключает возможность его использования на протяженных интервалах скольжения. Подобные утверждения в общем случае неправомерны. При заданной разрядности  $B$  (в битах) ортогональных составляющих вектора поворота  $W_N^p$  область значений его модуля можно представить в виде

$$1 - 2^{-B-1} \leq |\bar{W}_N^p| \leq 1 + 2^{-B-1} \quad (3)$$

или

$$1 - 2^{-B} \leq |\bar{W}_N^p| \leq 1. \quad (4)$$

Ясно, что представление (3) более точно выражает значение  $W_N^p$ , но в этом случае при  $|\bar{W}_N^p| > 1$  возможна неустойчивая работа алгоритма (1). Если же удовлетворяется представление (4), то, как будет показано ниже, это явится необходимым и достаточным условием устойчивой работы алгоритма (1), обеспечивающим конечное значение погрешности анализа при сколь угодно большом числе шагов скольжения. Это обстоятельство

имеет принципиальное значение, так как обосновывает возможность применения ЦАСС в различных системах спектральной обработки и отображения информации.

**Механизм образования погрешности взвешивания.** Полученная с помощью рекуррентной процедуры (1) оценка спектра  $F_q(p)$  совпадает с аналитическим значением скользящего спектра (2) только в том случае, когда на каждом шаге скольжения отсчеты вектора наблюдения  $Y_q$  соответствуют своим истинным значениям, все математические операции выполняются без инструментальных погрешностей, а вектор поворота  $W_N^p$  представлен кодовыми последовательностями бесконечной разрядности. Полагая, что обработке подвергается кусочно-постоянная функция  $Y(t)$  с шагом, согласованным с разрядностью арифметического устройства, можно устранить первые две причины и локализовать погрешность за счет конечной разрядности представления вектора поворота. При конечной разрядности  $B$  в двоичной системе счисления реальный вектор поворота может быть представлен в виде

$$\tilde{W}_N^p = W_N^p [1 \pm \Delta A(p)] \exp [j \Delta \varphi(p)], \quad (5)$$

где  $\Delta A(p)$  — амплитудная,  $\Delta \varphi(p)$  — фазовая погрешности. Неточное представление вектора поворота приводит к тому, что на каждом шаге реализации рекуррентного соотношения (1) суммарный вектор  $F_{q-1}(p) + (1/N)(Y_q - Y_{q-N})$  вместо поворота на угол  $(2\pi/N)p$  поворачивается на угол  $(2\pi/N)p \pm \Delta \varphi(p)$  и одновременно с этим изменяет свою длину в  $1 \pm \Delta A(p)$  раз. Указанные особенности осуществления оператора поворота являются источником погрешности взвешивания при скользящем анализе спектра. Многократное приближенное выполнение рекуррентного соотношения (1) приводит к накоплению погрешности взвешивания.

**Оценка погрешности взвешивания.** Определим оценку в предположении, что операции  $F'_q(p) = F_{q-1}(p) + (1/N)(Y_q - Y_{q-N})$  выполняются точно. Подставляя в (1) приближенное значение вектора поворота  $\tilde{W}_N^p$ , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_q(p) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^q Y_k \tilde{W}_N^{p[(q+1)-k]}, \quad q \leq N-1; \\ \tilde{F}_q(p) &= \frac{1}{N} \sum_{k=q-N+1}^q Y_k \tilde{W}_N^{p[(q+1)-k]} - \frac{1}{N} (1 - \tilde{W}_N^{Np}) \sum_{k=0}^{q-N} Y_k \tilde{W}_N^{p[(q-N+1)-k]}, \quad q \geq N. \end{aligned} \quad (6)$$

Разность  $F_q(p)$  и  $\tilde{F}_q(p)$  характеризует рассматриваемую погрешность скользящего спектра. С помощью выражений (6) и (2) для любого известного сигнала всегда можно рассчитать погрешность экспериментальной оценки скользящего спектра.

Наибольший интерес представляет ситуация, в которой обеспечивается максимальный полезный выходной эффект. Такая ситуация соответствует совмещению интервала анализа с интервалом существования сигнала ( $q = N-1$ ). Сравним истинное значение и оценку скользящего спектра в такой ситуации. Из (2) следует, что истинное значение скользящего спектра на любой частоте определяется выражением

$$F_{\max}(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k W_N^{-pk}, \quad (7)$$

т. е. совпадает с дискретной оценкой спектра исследуемого сигнала. В той же ситуации оценка скользящего спектра равна

$$\tilde{F}_{\max}(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \tilde{W}_N^{p(N-k)}. \quad (8)$$

Подставляя в (8) значение  $\tilde{W}_N^p$  из (5), имеем

взвешенной по закону  $|1 \pm \Delta A(p)|^{N-r}$ , на смещенной безразмерной частоте  $[p + (\Delta\phi(p)/2\pi)N]$ .

**Импульсная характеристика и условие устойчивости.** Анализатор скользящего спектра в каждом частотном канале (при фиксированной частоте анализа  $p$ ) можно рассматривать как некоторую дискретную линейную систему, которая по аналогии с непрерывными линейными системами полностью описывается импульсной характеристикой  $\tilde{h}(q)$ , представляющей собой реакцию системы на единичный импульс  $\delta(k)$  [5]. Используя общее выражение для алгоритма функционирования анализатора (6), заменой вектора наблюдения  $\{Y_k\}$  единичным импульсом  $\delta(k)$  легко получить выражение для импульсной характеристики

$$\begin{aligned} \tilde{h}(q) &= (1/N) \tilde{W}_N^{p(q+1)}, \quad q \leq N-1; \\ \tilde{h}(q) &= -(1/N) (1 - \tilde{W}_N^{Np}) \tilde{W}_N^{p(q-N+1)}, \quad q \geq N. \end{aligned} \quad (10)$$

Подстановка (5) в (10) с учетом максимально возможных отклонений  $\Delta A_{\max}(p) = \Delta$  и  $\Delta\phi_{\max}(p) = \Delta$  дает

$$\begin{aligned} \tilde{h}(q) &= (1/N) (1 \pm \Delta)^{q+1} W_N^{(p+N\Delta/2\pi)(q+1)}, \quad q \leq N-1; \\ \tilde{h}(q) &= -(1/N) [\exp(-jN\Delta) - (1 \pm \Delta)^N] (1 \pm \Delta)^{q-N+1} W_N^{(p+N\Delta/2\pi)(q+1)}, \quad q \geq N. \end{aligned}$$

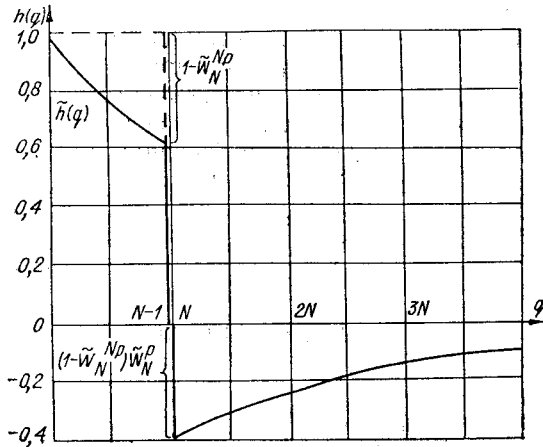
Анализ этого выражения позволяет установить, что ЦАСС на активном интервале анализа  $q \in [0, N-1]$  имеет монотонно меняющуюся огибающую импульсной характеристики  $(1 \pm \Delta)^{q+1}$ , которая не равна нулю вне интервала анализа и, кроме того, смещает частоту анализа на величину  $\Delta p_{\max} = N\Delta/2\pi$ . В качестве примера на рисунке показана огибающая импульсной характеристики при  $N=64$ ,  $B=7$ ,  $\Delta A(p) = -2^{-7}$ ,  $\Delta\phi(p) = 0$ .

Если смещение рабочей частоты в практической ситуации существенно не проявляется, то неравномерность огибающей может привести к значительному сглаживанию спектра на выходе анализатора. То, что импульсная характеристика не равна нулю при  $q \geq N$ , приводит к наличию последействия в анализаторе спектра, интенсивность и скорость спада которого существенно зависят от соотношения интервала квантования составляющих вектора поворота  $\Delta$  и размерности интервала анализа  $N$ . В принципе реакция последействия имеет тот же характер, что

и на основном интервале, однако ослаблена примерно до уровня  $[1 - (1 \pm \Delta)^N]$ .

Наличие бесконечной памяти в рассматриваемой системе может привести к неустойчивой работе, т. е. к расходящемуся накоплению погрешности взвешивания. Для непрерывных стационарных систем признаком устойчивости является интегрируемость модуля импульсной характеристики [5]:

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq C. \quad \text{Применительно к рассматриваемой нами линей-$$



ной системе это условие записывается в виде [6]  $\sum_{q=0}^{\infty} |\tilde{h}(q)| \leq C$ . Используя полученное выражение (11) для импульсной характеристики системы при максимально возможных отклонениях вектора поворота, условие устойчивости можно выразить в форме

$$\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} (1 \pm \Delta)^{q+1} + \frac{V_N}{N} \sum_{q=1}^{\infty} (1 \pm \Delta)^{q+1} \leq C,$$

где  $V_N$  — модуль фазового множителя,  $V_N = |[1 - (1 \pm \Delta)^N \exp(jN\Delta)] \times \exp(-jN\Delta)|$ . Поскольку при конечных значениях  $N$  и  $\Delta$  первое слагаемое и  $V_N$  всегда конечны, то окончательно условие устойчивости приобретает вид

$$\sum_{q=0}^{\infty} (1 \pm \Delta)^{q+1} < L$$

и сводится к условию сходимости бесконечной геометрической прогрессии, которое, как известно, выполняется, если знаменатель прогрессии меньше единицы  $1 \pm \Delta < 1$ . Таким образом, для устойчивой работы анализатора спектра достаточно, чтобы модуль вектора поворота всегда был меньше единицы  $|\tilde{W}_N^p| \leq 1$ . Выполнение этого условия достигается соответствующим округлением квантованных значений ортогональных составляющих вектора поворота  $\text{Re } W_N^p$  и  $\text{Im } W_N^p$ .

Характерно, что технически условие устойчивости удовлетворяется без каких-либо дополнительных аппаратных затрат. Это обстоятельство весьма существенно, поскольку известные методы стабилизации работы ЦАСС на бесконечном интервале скольжения [2, 4] основаны на изменении структуры анализатора и потому аппаратно избыточны. Рациональный выбор разрядности и минимизирующее округление позволяют достигать требуемых параметров обработки без изменения алгоритма и структуры анализатора спектра.

## ВЫВОДЫ

На основании изложенного можно утверждать, что устойчивая работа ЦАСС может быть обеспечена в результате минимизирующего округления ортогональных составляющих вектора поворота. При этом, несмотря на накопление погрешности взвешивания, ее суммарное значение всегда сходится к конечной величине. Соответствующий выбор разрядности  $B$  представления  $W_N^p$ , согласованный с размерностью вектора наблюдения  $N$ , всегда позволяет обеспечить заданную точность. Существенно, что обеспечение устойчивости работы достигается без изменения структуры и дополнительных аппаратных затрат.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чайковский В. И. и др. Анализатор спектра Фурье. (Автор. свид-во № 560232).— БИ, 1977, № 20.
2. Оботини А. Н., Страцини Е. Э. Алгоритмы определения скользящего спектра.— Автометрия, 1975, № 1.
3. Чайковский В. И. Функциональные особенности цифровых анализаторов спектра, работающих в реальном масштабе времени.— Киев, 1976. (Препринт/АН УССР, Ин-т кибернетики; № 76—36).
4. Ефанов В. Н., Коршевер И. И., Лобастов В. М. О вычислении мгновенного спектра.— Автометрия, 1973, № 3.
5. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем.— М.: Наука 1970.
6. Богнер Р., Константинович А. Введение в цифровую фильтрацию.— М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 22 декабря 1977 г.;  
окончательный вариант — 10 декабря 1981 г.