УДК 621.3 : 621.317.517 : 52 : 579.24

В. В. ГУБАРЕВ

(Новосибирск)

ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИНВАРИАНТНЫЕ К ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫМ БЕЗЫНЕРЦИОННЫМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

Постановка задачи. Во многих случаях решение статистических задач идентификации, измерения, моделирования, классификации и др. затрудняется тем, что используемые для этого характеристики случайных элементов (величин, векторов и функций), описывающие интересующие исследователя свойства объекта, существенно зависят от функциональных преобразований, которым подвергаются эти элементы. Кардинальное улучшение решения можно получить, если перейти к инвариантным характеристикам случайных элементов, отражающим интересующие исследователя свойства объекта, которые не изменяются при функциональном преобразовании f случайных элементов.

Цель работы — рассмотрение некоторых подобных характеристик, свойств и примеров их возможных приложений.

Необходимые определения и понятия. Рассмотрим некоторые случайные элементы U, V, а именно: величины X, Y; n-мерные векторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$; скалярные $X(t)$, $Y(t)$ или n-мерные векторные $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ функции скалярного * непрерывного (процессы) или дискретного (последовательности) временного аргумента $t \in (-\infty, \infty)$. Пусть $Q_U(\boldsymbol{\theta})$ и $Q_V(\boldsymbol{\theta})$ — некоторые вероятностные характеристики элементов U, V, найденные усреднением по вероятностной мере элементов U, V, т. е.

$$Q_U(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}\{g_Q[U;\ \boldsymbol{\theta}]\}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ — k-мерный аргумент; $\mathbf{M}\{\cdot\}$ — оператор усреднения по вероятностной мере (оператор математического ожидания); $g_Q[\cdot]$ — функциональное преобразование, определяемое видом характеристики $Q(\boldsymbol{\theta})$. В дальнейшем будем полагать, что аргумент $\boldsymbol{\theta}$ может отсутствовать (например, если Q — одномерная числовая характеристика) и содержать в виде составляющих временные сдвиги $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$; $\tau_0 = 0$.

Определение 1. Характеристика $Q(\boldsymbol{\theta})$ случайного элемента U называется инвариантной к функциональному преобразованию $f(\cdot)$, или f-инвариантной, если из существования ее для некоторого случайного элемента U вытекает существование такой же характеристики для элемента $V = f(U)$, причем $Q_V(\boldsymbol{\theta}) = Q_U(\boldsymbol{\theta})$.

Обозначим через Ψ_A множество всех одномерных функций $f(x)$ действительного скалярного аргумента x, обладающих некоторым свойством A (однозначность, дифференцируемость, линейность по параметрам или аргументу и т. д.). При этом положим, что множество $\mathscr{X}$ значений аргумента x включает в себя множество значений x, представляющих интерес для исследователя, например множество $\mathscr{U}$ значений случайного элемента U **. Через Φ обозначим множество всех взаимно однозначных на $\mathscr{X}$, а через Λ — всех линейных по аргументу на $\mathscr{X}$ одномерных функций $f(x)$ действительного скалярного аргумента x.

Определение 2. Характеристика $Q(\boldsymbol{\theta})$ случайного элемента U называется Ψ_A (либо Φ, Λ)-инвариантной, если она f-инвариантна к любой функции $f(x)$, для которой свойство A выполняется в области значений аргумента x, равной области $\mathscr{U}$ значений элемента U.

---

* Скалярность здесь принята для упрощения. Результаты работы могут быть обобщены на функции векторного аргумента и на случайные поля.

** Если U — случайный вектор или векторная случайная функция, то $\mathscr{U}$ есть объединение множества значений каждой компоненты вектора.

Инвариантность некоторых известных характеристик. Теперь рассмотрим с точки зрения инвариантности некоторые известные характеристики $Q(\theta)$. Все характеристики случайных элементов можно разбить на две группы: используемые для описания статики и динамики физических объектов.

Из «статических» отметим следующие инвариантные характеристики. Прежде всего, вероятности $\mathbf{P}(\cdot)$ ряда распределения дискретных случайных величин и векторов, которые являются Ф-инвариантными. Λ-инвариантны некоторые безразмерные числовые характеристики, такие, например, как коэффициенты асимметрии и эксцесса, коэффициенты корреляции, полярные корреляционные функции и т. п. Ф-инвариантны меры количества информации по Шеннону $I(X, Y)$ [1] и расстояний между распределениями Кульбака — Лейблера $d(X, Y)$ [2], а также некоторые производные от них характеристики. Инвариантны к любым однозначным (а не только к взаимно однозначным) преобразованиям корреляционное отношение, коэффициент нормированной информации, коэффициент Валлиса, показатель влияния и т. п. [3, 4], если они используются как индикаторы однозначной функциональной зависимости $Y = f(X)$ двух величин X и Y. Однако подобные характеристики перестают быть инвариантными, если их использовать как индикаторы не функциональной, а статистической связи величин X и Y.

Рассмотренные инвариантные характеристики являются (генеральными) характеристиками случайных элементов, определяемыми усреднением по вероятностной мере. В последнее время все более широкое приложение находят инвариантные выборочные характеристики, найденные усреднением по выборке. Это прежде всего ранговые коэффициенты корреляции Спирмэна и Кендалла [4—6]. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ — парная выборка из генеральных совокупностей случайных величин X и Y.

Введем согласно [5] выборочный обобщенный коэффициент корреляции

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}b_{ij}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_{ij}^2\right]^{-1/2}. \tag{2}$$

Здесь a_{ij} и b_{ij} — некоторые функции от x_i, x_j и y_i, y_j такие, что $a_{ij} = -a_{ji}$, $b_{ij} = -b_{ji}$ и $a_{ij} = b_{ij} = 0$ при $i = j$. Если положить

$$a_{ij} = x_j - x_i, \quad b_{ij} = y_j - y_i, \tag{3}$$

то Г представляет собой обычный выборочный коэффициент парной корреляции r, чаще всего используемый в качестве оценки коэффициента корреляции

$$\rho = \mathbf{M}\{\mathring{X}\mathring{Y}\}[\mathbf{D}\{X\}\mathbf{D}\{Y\}]^{-1/2}, \tag{4}$$

где $\mathbf{D}(\cdot)$ — оператор дисперсии, $\mathring{X} = X - \mathbf{M}\{X\}$. При

$$a_{ij} = s_j - s_i, \quad b_{ij} = q_j - q_i \tag{5}$$

(s_i — ранг x_i, т. е. порядковый номер x_i в вариационном ряду $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(N)}$, а q_i — ранг y_i) выражение (2) дает выборочный ранговый коэффициент корреляции Спирмэна $\mathrm{P_C}$ [4—6]. Полагая

$$a_{ij} = \operatorname{sign}(s_j - s_i), \quad b_{ij} = \operatorname{sign}(q_j - q_i), \tag{6}$$

получаем выборочный ранговый коэффициент корреляции Кендалла $\mathrm{P_K}$ [4, 5]. Если же взять a_{ij} из (3), а b_{ij} из (5) или, наоборот, a_{ij} из (5), а b_{ij} из (3), то будем иметь выборочный полуранговый коэффициент корреляции типа Спирмэна Π_C [7]; при a_{ij} из (3), b_{ij} из (6), или наоборот, приходим к полуранговому коэффициенту корреляции типа Кендалла Π_K, а при a_{ij} из (5), b_{ij} из (6), или наоборот,— к ранговому коэффициенту корреляции типа Спирмэна — Кендалла $\mathrm{P_{CK}}$. Выполнив несложные преобразования, из (2) можно получить более привычные и удобные в вычислительном отношении формулы для рассматриваемых эмпирических характеристик [4—7].

Нетрудно убедиться, что если $Z=f_1(X)$, а $V=f_2(Y)$ и $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ — любые взаимно однозначные функции, то $\mathrm{P_C}$, $\mathrm{P_K}$, $\mathrm{P_{CK}}$ для X, Y совпадают с $\mathrm{P_C}$, $\mathrm{P_K}$ и $\mathrm{P_{CK}}$ для Z, V, т. е. данные характеристики Ф-инвариантны к преобразованиям X и Y. Аналогично можно убедиться, что Ф-инвариантны полуранговые характеристики Π_C и Π_K, но только по отношению к той случайной величине X и Y, которая участвует в образовании Π_C, Π_K через ранги. В ряде случаев может оказаться полезным коэффициент ассоциации [7].

Новые инвариантные характеристики. Рассмотренные в предыдущем пункте характеристики, во-первых, могут использоваться лишь для описания статики физических объектов, во-вторых, по своей природе они выборочные. С другой стороны, в аналитических априорных исследованиях необходимо иметь генеральные инвариантные характеристики, т. е. определяемые усреднением по вероятностной мере (а не по самой выборке), с помощью которых можно описывать динамику объектов.

Возможны различные подходы к построению инвариантных характеристик. Один из них основан на переходе от случайного элемента U к элементу $V=\varphi(U)$, характеристики которого инвариантны к заданному множеству преобразований.

Анализ предыдущих выборочных характеристик показывает, что можно использовать в качестве преобразования $\varphi(U)$ такое, которое осуществляет ранжирование. Таким преобразованием является используемое при определении конкордации [5] преобразование через функцию распределения $F_U(\cdot)$. Рассмотрим некоторые подобные характеристики на примере скалярных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, имеющих абсолютно непрерывные функции распределения $F_X(x)=F_X(x;\ t_1)$ и $F_Y(y)=F_Y(y;\ t_2)$. Многие из них могут быть легко перенесены на случайные величины X, Y, если положить $X=X(t_1)$, $Y=Y(t_2)$.

Взаимная конкорреляционная функция $\mathrm{K}_{XY}(t_1,\ t_2)$ (функция конкордации, корреляционная функция $R_{F_X(X)F_Y(Y)}(t_1, t_2)=\operatorname{cor}\{F_X[X(t_1)], F_Y[Y(t_2)]\}$ функций $F_X[X(t)]$ и $F_Y[Y(t)]$) и *нормированная конкорреляционная функция* $\varkappa_{XY}(t_1,\ t_2)$:

$$\mathrm{K}_{XY}(t_1,\ t_2)=\mathbf{M}\{\overset{\circ}{F}_X[X(t_1)]\overset{\circ}{F}_Y[Y(t_2)]\}=\mathbf{M}\{F_X[X(t_1)]F_Y[Y(t_2)]\}-1/4, \quad (7)$$

$$\varkappa_{XY}(t_1,\ t_2)=\mathrm{K}_{XY}(t_1,\ t_2)[\mathrm{K}_{XX}(t_1,\ t_1)\mathrm{K}_{YY}(t_2,\ t_2)]^{-1/2}=12\mathrm{K}_{XY}(t_1,\ t_2). \quad (8)$$

Полярная (знаковая) конкорреляционная функция:

$$\Pi_{XY}(t_1,\ t_2)=\operatorname{cor}\{\operatorname{sign}\{\overset{\circ}{F}_X[X(t_1)]\},\ \operatorname{sign}\{\overset{\circ}{F}_Y[Y(t_2)]\}\}=$$
$$=\mathbf{M}\{\operatorname{sign}\{\overset{\circ}{F}_X[X(t_1)]\}\operatorname{sign}\{\overset{\circ}{F}_Y[Y(t_2)]\}\}. \quad (9)$$

Релейная конкорреляционная функция:

$$\mathrm{H}_{X s_Y}(t_1, t_2)=\mathbf{M}\{\overset{\circ}{F}_X[X(t_1)]\operatorname{sign}\{\overset{\circ}{F}_Y[Y(t_2)]\}\}. \quad (10)$$

Если $X(t)$ и $Y(t)$ стационарны и стационарно связанны*, то, вводя для них преобразование Фурье от конкорреляционных, кондисперсионных, конструктурных и им подобных функций, можно получить соответствующие конспектральные функции и плотности мощности. Например, если $\mathrm{K}_{XY}(t_1,\ t_2)=\mathrm{K}_{XY}(t_2-t_1)=\mathrm{K}_{XY}(\tau)$, то

$$C_{XY}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_{XY}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau, \quad (11)$$

$$C_{XY}(\nu)=\Delta t\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_{XY}(i\Delta t)\,e^{-ji\nu}, \quad \nu=\omega\Delta t, \quad (12)$$

---

* Спектральное описание широко используется и для нестационарных функций. Требование стационарности вводится здесь с целью упрощения изложения.

есть взаимные конспектральные плотности мощности случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$ (см. (11)) и последовательностей $X(i\Delta t)$, $Y(i\Delta t)$ (см. (12)), т. е. спектральные плотности для $F_X[X(t)]$, $F_Y[Y(t)]$.

Рассмотрим теперь некоторые свойства и методы оценивания для подобных характеристик на примере $\mathrm{K}_{XY}(t_1, t_2)$ и $C_{XY}(\omega)$, $C_{XY}(\nu)$. Прежде всего отметим, что поскольку эти характеристики суть корреляционная функция (КФ) и спектральные плотности мощности (СПМ) случайных функций $F_X[X(t)]$ и $F_Y[Y(t)]$, то для них справедливы все свойства КФ и СПМ. Далее, учитывая, что для монотонно возрастающих функций $Y=f(X)$ справедливо $F_Y(y)=F_X[\varphi(y)]$, а для монотонно убывающих — $F_Y(y)=1-F_X[\varphi(y)]$, где $\varphi(y)$ — функция, обратная к $f(\cdot)$, легко убедиться, что $\mathrm{K}_{XY}(t_1, t_2)$ (а следовательно, $C_{XY}(\omega)$, $C_{XY}(\nu)$) являются Ф-инвариантными. Таким образом, все взаимно однозначные нелинейности прозрачны для этих характеристик, что позволяет широко использовать их мальных случайных функции

$$\varkappa_{XY}(t_1, t_2)=(6/\pi)\arcsin[(1/2)\rho_{XY}(t_1, t_2)]\approx\rho_{XY}(t_1, t_2), \tag{13}$$

для ступенчатых случайных функций $X(t)$ с двумерной плотностью вероятностей [1]

$$W_X(x_1, x_2; \tau)=W_X(x_1)W_X(x_2)[1-\rho_{XX}(\tau)]+$$
$$+W_X(x_1)\delta(x_2-x_1)\rho_{XX}(\tau), \quad \rho_{XX}(\tau)\geqslant 0 \tag{14}$$

выполняется соотношение $\varkappa_{XX}(\tau)=\rho_{XX}(\tau)$ и т. д. Очевидно, что для равномерно распределенных случайных функций всегда $\varkappa(\tau)=\rho(\tau)$.

Приблизительное равенство (13) очень важно при исследовании динамических систем, распределение выходных сигналов которых нормальное или близко к нормальному.

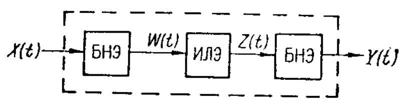
Наконец, еще одно важное свойство характеристик $\mathrm{K}_{XY}(t_1, t_2)$, $C_{XY}(\omega)$, $C_{XY}(\nu)$ заключается в их независимости от одномерных законов распределения (и, следовательно, от любых других одномерных характеристик) функций $X(t)$ и $Y(t)$. Это делает их удобными в задачах имитации (моделирования) случайных функций методом нелинейных преобразований. Заметим также, что $\varkappa_{XY}$ представляет собой генеральный аналог выборочного коэффициента Спирмэна [6].

Вопросы оценивания характеристик $\mathrm{K}_{XY}(t_1, t_2)$ и $C(\omega)$, $C(\nu)$. Теперь обсудим некоторые вопросы, связанные с оцениванием введенных характеристик на примере $\mathrm{K}_{XY}(t_1, t_2)$, $\varkappa_{XY}(t_1, t_2)$ и $C(\omega)$, $C(\nu)$.

Первый метод оценивания $\mathrm{K}_{XY}(t_1, t_2)$ основан на том, что $\varkappa_{XY}(t_1, t_2)$ для фиксированных t_1, t_2 представляет собой ансамблевый (генеральный) аналог выборочного коэффициента корреляции Спирмэна P_C для случайных величин $X=X(t_1)$ и $Y=Y(t_2)$, который является несмещенной ансамблевой оценкой $\varkappa_{XY}(t_1, t_2)$, если $x_i=x_i(t_1)$, $y_2=y_i(t_2)$, $i=\overline{1, N}$, и несмещенной траекторной оценкой $\varkappa_{XY}(\tau)$ для стационарно связанных функций $X(t)$, $Y(t)$, если $x_i=x(i\Delta t)$, $y_i=y(i\Delta t+\tau)$. Однако данный метод неудобен тем, что для нахождения P_C необходимо ранжирование всех x_i, y_i, $i=\overline{1, N}$, а это требует больших вычислительных затрат.

Второй метод основан на переходе от $X(t)$ и $Y(t)$ к $Z(t)=F_X[X(t)]$ и $V(t)=F_Y[Y(t)]$ с последующим нахождением $\mathrm{K}_{XY}(t_1, t_2)$ и $C_{XY}(\omega)$, $C_{XY}(\nu)$ как обычных КФ $R_{ZV}(t_1, t_2)$ и СПМ $S_{ZV}(\omega)$, $S_{ZV}(\nu)$. Метод особенно удобен, если $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ известны. Если же функции неизвестны, можно использовать их непараметрические, параметрические или смещенные оценки. Недостаток метода сводится к необходимости вычисления (или оценивания) $F_X(x)$, $F_Y(y)$ и выполнения преобразований $F_X[X(t)]$, $F_Y[Y(t)]$.

Третий метод — модификация второго, основанная на замене $X(t)$ и $Y(t)$ ранговыми функциями $\Xi(t)$, $\mathbf{Z}(t)$, получаемыми на основе группирования одним из следующих способов. Диапазон [0, 1] значений $F_X(x)$, $F_Y(y)$ разбивается на n равных пронумерованных интервалов с шагом $\Delta p = 1/n$, для граничных значений которых находятся соответствующие им значения квантилей $x_{[j\Delta p]}$ или их оценки $\hat{x}_{[j\Delta p]}$, $j=\overline{1, n}$. Затем каждое значение x_i (аналогично y_i — см. первый метод) заменяется номером j того интервала $[x_{[j\Delta p]}, x_{[(j+1)\Delta p]})$, в который оно попадает. Таким образом, траектория $x(t)$ функции $X(t)$ заменяется траекторией $\xi(t)$ функции $\Xi(t)$, принимающей значения j рангов, $j=\overline{1, n}$. Второй способ (гистограммный) сводится к разбиению диапазонов значений $X(t)$, $Y(t)$ на n равных интервалов (группирование, квантование по уровню) вида $(x_{\min}+(j-1)\Delta x;\ x_{\min}+j\Delta x)$, $j=\overline{1, n}$ с заменой $F_X[x(t)]$ и $F_Y[y(t)]$ вероятностями или оценками вероятностей попадания X (или x_i) в интервалы $(-\infty;\ x_{\min}+j\Delta x)$. Оценки $\hat{C}(\omega)$ и $\hat{C}(\nu)$ при этом могут быть найдены либо преобразованием Фурье оценок конкорреляционных функций, либо непосредственно по $Z(t)$, $V(t)$, $\Xi(t)$, $\mathbf{Z}(t)$, например, методами БПФ.



Примеры применения Ф-инвариантных характеристик. Рассмотрим нелинейную систему, эквивалентная схема которой представлена на рисунке (здесь БНЭ — безынерционный нелинейный элемент, ИЛЭ — стационарный инерционный линейный элемент). Допустим, что измерению доступны лишь характеристики входного стационарного сигнала $X(t)$ и выходного сигнала $Y(t)$ системы, а выходные характеристики $w=f_1(x)$ и $y=f_2(z)$ БНЭ неизвестны. Известно лишь, что функции $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ взаимно однозначные. Необходимо исследовать динамические свойства системы в установившемся режиме, которые, естественно, инициируются только динамическими свойствами ИЛЭ. Использование традиционных корреляционных и спектральных характеристик $R(\tau)$ и $S(\lambda)$ в этом случае не дает желаемых результатов в силу того, что их значения существенно зависят как от динамики ИЛЭ, так и от нелинейности БНЭ. В то же время в установившемся режиме в силу взаимной однозначности $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$

$$\mathrm{K}_{YY}(\tau)=\mathrm{K}_{ZZ}(\tau),\quad \mathrm{K}_{WW}(\tau)=\mathrm{K}_{XX}(\tau),\quad C_{YY}(\lambda)=C_{ZZ}(\lambda),$$
$$C_{WW}(\lambda)=C_{XX}(\lambda),$$

т. е. БНЭ прозрачны по отношению к $\mathrm{K}(\tau)$ и $C(\lambda)$, так что значения $\mathrm{K}_{YY}(\tau)$ и $C_{YY}(\lambda)$ зависят только от значений $\mathrm{K}_{XX}(\tau)$ и $C_{XX}(\lambda)$ и от динамических свойств ИЛЭ, но не зависят от БНЭ. Тем самым с помощью имеющихся характеристик можно описать и исследовать динамику нелинейной системы рисунка. В частности, если $\rho W(t)=\varkappa W(t)$, а $Z(t)$ близка к нормальной функции (т. е. ИЛЭ очень инерционен по сравнению со спектром $W(t)$), то согласно (13)* $\mathrm{K}_{YY}(\tau)$ с $\mathrm{K}_{XX}(\tau)$, $\varkappa_{YY}(\tau)$ с $\varkappa_{XX}(\tau)$ и $C_{YY}(\lambda)$ с $C_{XX}(\lambda)$ будут связаны такими же зависимостями, какими связаны $\rho_{ZZ}(\lambda)$ с $\rho_{WW}(\tau)$, т. е. $C_{YY}(\lambda)=\alpha C_{XX}(\lambda)|B(j\lambda)|^2$, где $B(j\lambda)$ — частотная характеристика ИЛЭ, $\alpha=R_{WW}(0)/R_{ZZ}(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций.— М.: Физматгиз, 1962.
2. **Тарасенко Ф. П.** Непараметрическая статистика.— Томск: ТГУ, 1976.
3. **Елисеева И. И., Рукавишников В. О.** Группировка, корреляция, распознавание образов.— М.: Статистика, 1977.

* Величина $(\varkappa-\rho)/\rho$ в (13) не превышает 5%, причем наибольшее значение ее приходится на $\rho=0$.

4. **Мирский Г. Я.** Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения.— М.: Энергоиздат, 1982.
5. **Кендэл М.** Ранговые корреляции.— М.: Статистика, 1975.
6. **Поллард Дж.** Справочник по вычислительным методам статистики.— М.: Финансы и статистика, 1982.
7. **Дубровский С. А.** Прикладной многомерный статистический анализ.— М.: Финансы и статистика, 1982.

Поступила в редакцию 23 января 1984 г.

УДК 517.52 : 519.24

В. Я. КРАКОВСКИЙ, В. И. ЧАЙКОВСКИЙ

(Киев)

ОСОБЕННОСТИ СКОЛЬЗЯЩЕГО АНАЛИЗА СПЕКТРА

Постановка задачи. В системах спектральной обработки информации в ряде случаев необходимо обеспечить инвариантность анализа спектра $F(p)$ к сдвигу исследуемого сигнала Y. Такой особенностью обладает цифровой анализатор скользящего спектра (ЦАСС) [1], реализующий рекуррентный алгоритм [2]

$$F_q(p) = [F_{q-1}(p) + (1/N)(Y_q - Y_{q-N})]\, W_N^p, \tag{1}$$

где W_N^p — принятое в теории дискретного преобразования Фурье (ДПФ) символическое представление вектора поворота $\exp[j(2\pi/N)p]$, q — безразмерный индекс скольжения (номер последнего отсчета сигнала), N — размерность вектора наблюдения Y, p — безразмерная частота анализа (номер гармоники). Алгоритм (1) на каждом шаге скольжения формирует сумму вида

$$F_q(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=q-N+1}^{q} Y_k W_N^{-p[k-(q-N+1)]}, \tag{2}$$

которая, по определению, является дискретным эквивалентом согласованного мгновенного спектра [3].

Цифровым анализаторам скользящего спектра, помимо характерных для традиционных процессоров преобразования Фурье погрешностей, свойственна специфическая составляющая, которую можно назвать погрешностью взвешивания. Выполненный в некоторых работах [2, 4] анализ такой погрешности показывает, что она неограниченно возрастает с увеличением числа шагов скольжения q. Это свидетельствует о неустойчивости скользящего анализа спектра и принципиально исключает возможность его использования на протяженных интервалах скольжения. Подобные утверждения в общем случае неправомерны. При заданной разрядности B (в битах) ортогональных составляющих вектора поворота W_N^p область значений его модуля можно представить в виде

$$1 - 2^{-B-1} \leqslant |\widetilde{W}_N^p| \leqslant 1 + 2^{-B-1} \tag{3}$$

или

$$1 - 2^{-B} \leqslant |\widetilde{W}_N^p| \leqslant 1. \tag{4}$$

Ясно, что представление (3) более точно выражает значение W_N^p, но в этом случае при $|\widetilde{W}_N^p| > 1$ возможна неустойчивая работа алгоритма (1). Если же удовлетворяется представление (4), то, как будет показано ниже, это явится необходимым и достаточным условием устойчивой работы алгоритма (1), обеспечивающим конечное значение погрешности анализа при сколь угодно большом числе шагов скольжения. Это обстоятельство