

СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭКСТРЕМУМОВ

Предельная точность средств статистических измерений, как и любых других измерительных приборов и систем, определяется наличием методических погрешностей, происходящих «от несовершенства метода измерения» (ГОСТ 16263—70), под которым понимается неадекватность оператора, описывающего измерительную процедуру, параметрам измеряемой величины [1]. Вследствие этого исследование методических погрешностей определения вероятностных характеристик, разработка способов их оценки и нормирования, изучение путей их исключения либо снижения и компенсации являются важнейшими задачами метрологии.

Суммарная методическая погрешность результата j -го измерения вероятностной характеристики Θ случайного процесса $x(t)$ может быть представлена следующим функционалом:

$$\Delta\Theta_{jm}^*[x(t)] = \mathcal{F}(\Delta_{кл}, \Delta_{кв}, \Delta_{см}, \Delta_{нес}, \Delta_{вос}), \quad (1)$$

где $\Delta_{кл}$ — погрешность классификации, обусловленная отклонениями модели, используемой при синтезе алгоритма измерений, от реального процесса; $\Delta_{кв}$ — погрешность, вызванная конечностью объема выборочных данных; $\Delta_{см}$ — погрешность, связанная со смещенностью оценки; $\Delta_{нес}$ — погрешность, определяемая несостоятельностью оценки; $\Delta_{вос}$ — погрешность восстановления непрерывной характеристики по полученным дискретным значениям.

Следует отметить, что из рассмотренного ряда составляющих наибольший «вес» имеет статистическая погрешность, обусловленная конечностью выборочных данных $\Delta_{кв}$.

Анализаторам функций распределения экстремумов (как локальных, так и глобальных), размахов и других параметров выбросов, для определения которых необходимо выявлять экстремальные значения случайной функции, присуща специфическая дополнительная составляющая методической погрешности, обусловленная дискретизацией процесса $x(t)$. Эта погрешность возникает в связи с тем, что при длительностях выбросов τ_{j-1} , меньших периода дискретизации T_0 , их экстремальные значения H_j могут быть не обнаружены в пределах своего дифференциального коридора и отнесены к соседнему (рис. 1). В результате происходит перераспределение экстремумов между каналами, эквивалентное нестабильности или погрешности установки границ дифференциальных коридоров, что искажает искомую плотность распределения. При этом максимальная погрешность перераспределения имеет место в крайних каналах из-за того, что длительности выбросов в них минимальны и происходит только потеря части экстремумов, тогда как во внутренних коридорах осуществляется взаимное перераспределение с противоположными знаками. Таким образом, при определении вероятностных характеристик экстремумов функционал (1) содержит дополнительную составляющую Δ_d , определению которой и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим стационарный эргодический дважды дифференцируемый случайный процесс $x(t)$ с нулевым средним значением $m_x =$

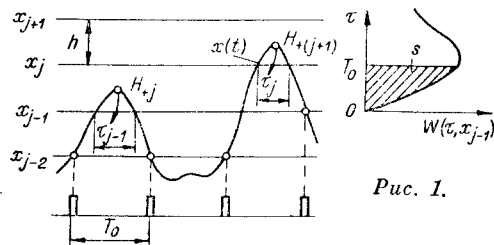


Рис. 1.

$= 0$ и конечной дисперсией σ_x^2 в области двух дифференциальных коридоров, ограниченных уровнями x_{j+1} , x_j , x_{j-1} (см. рис. 1). Относительную погрешность измерения плотности распределения максимумов H_+ в j -м коридоре определим как отношение

$$\delta_{jd} = (W_j^*(H_+) - W_j(H_+))/W_j(H_+), \quad (2)$$

где δ_{jd} — составляющая методической погрешности, обусловленная дискретизацией процесса (в дальнейшем индекс «д» опустим, так как исследуется только эта составляющая); $W_j(H_+)$ и $W_j^*(H_+)$ — соответственно истинная и измеренная плотности распределения максимумов в j -м коридоре.

Условимся, что j -й дифференциальный коридор ограничен уровнями x_j и x_{j-1} ; тогда $j \in \{1, K\}$ (K — число каналов анализатора). Выразим

Здесь $N_j(H_+, T)$ — истинное число максимумов, попавших в j -й коридор; $N_{\tau j}(H_+, T)$ — число потерянных максимумов из j -го канала; $N_{\tau(j+1)}(H_+, T)$ — число максимумов, потерянных $(j+1)$ -м и приобретенных j -м коридором; $N(H_+, T)$ — общее число максимумов в реализации процесса; $h = x_{j+1} - x_j$ — ширина дифференциального коридора; T — время наблюдения реализации.

Запишем выражение для относительной погрешности с учетом соотношений (3) и (4):

$$\delta_j = (N_{\tau(j+1)}(H_+, T) - N_{\tau j}(H_+, T))/N_j(H_+, T). \quad (5)$$

Число потерянных максимумов в каналах определим через соответствующие вероятности потерь:

$$\begin{aligned} N_{\tau j}(H_+, T) &= P_{\tau j} N_j(H_+, T), \\ N_{\tau(j+1)}(H_+, T) &= P_{\tau(j+1)} N_{(j+1)}(H_+, T). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда соотношение (5) примет вид

$$\delta_j = P_{\tau(j+1)}(N_{j+1}(H_+, T)/N_j(H_+, T)) - P_{\tau j} \quad (7)$$

или, учитывая (3),

$$\delta_j = P_{\tau(j+1)}(W_{j+1}(H_+)/W_j(H_+)) - P_{\tau j}. \quad (8)$$

Найдем вероятность потерь максимумов в j -м коридоре. Будем полагать, что моменты выборок и появления экстремумов независимы. Тогда, если длительность выброса τ меньше периода дискретизации T_0 , вероятность того, что экстремум не будет обнаружен в пределах данного канала и будет отнесен к соседнему, равна

$$p(\tau) = (1 - \tau/T_0) |_{\tau < T_0}. \quad (9)$$

Интегрируя последнее выражение по τ в пределах от 0 до T_0 с учетом плотности распределения длительностей выбросов, вычислим полную вероятность потерь максимумов из j -го коридора:

$$P_{\tau j} = \int_0^{T_0} p(\tau) W(\tau, x_{j-1}) d\tau, \quad (10)$$

где $W(\tau, x_{j-1})$ — плотность распределения длительности выбросов, превышающих уровень x_{j-1} (см. рис. 1).

Подставляя в соотношение (10) значение $p(\tau)$ из (9), получим

$$P_{Tj} = \int_0^{T_0} (1 - \tau/T_0) W(\tau, x_{j-1}) d\tau = (1 - \bar{\tau}/T_0) |_{\tau < T_0}. \quad (11)$$

Последнее выражение имеет следующий физический смысл: вероятность потерь экстремумов из j -го коридора определяется отношением средней длительности выбросов $\bar{\tau}$ ($\tau < T_0$) в этом коридоре к периоду дискретизации T_0 . При приближении средней длительности к T_0 вероятность потерь уменьшается. Верхним пределом интегрирования является значение интервала дискретизации T_0 , так как при длительности выбросов $\tau > T_0$ регистрируются все экстремумы без исключения. Плотность распределения длительностей для стационарного процесса $x(t)$ и при $\tau \ll \tau_k$ (τ_k — интервал корреляции) находится из следующего соотношения [2]:

$$W(\tau, x_{j-1}) \simeq \frac{1}{N_1^+(x_{j-1})} \int_0^\infty d\dot{x}(t_0) \int_0^{-\infty} \dot{x}(t_0) \dot{x}(t_1) W_2[x_{j-1}, x_{j-1}, \dot{x}(t_0), \dot{x}(t_1)] d\dot{x}(t_1). \quad (12)$$

Здесь t_0 и t_1 — моменты первого и второго пересечений сигналом $x(t)$, имеющим положительную первую производную уровня x_{j-1} ; $W_2[x_{j-1}, x_{j-1}, \dot{x}(t_0), \dot{x}(t_1)]$ — совместная плотность вероятности для значений случайного процесса $x(t_0) = x(t_1) = x_{j-1}$ и его производных; $N_1^+(x_{j-1}) = \int_0^\infty \dot{x}(t) W_2[x_{j-1}, \dot{x}(t)] d\dot{x}(t)$ — среднее число пересечений процессом с положительной первой производной уровня x_{j-1} в единицу времени.

Плотность вероятности максимумов процесса $x(t)$ находится как отношение среднего числа максимумов, попавших в данный коридор, к среднему числу максимумов в реализации длительностью T :

$$W_j(H_+) = \int_0^T dt \int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) W_3[x_{j-1}, 0, \ddot{x}(t)] d\ddot{x}(t) \Big/ \int_0^T dt \int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) W_2[0, \ddot{x}(t)] d\ddot{x}(t), \quad (13)$$

где $W_2[\dot{x}(t), \ddot{x}(t)]$ — совместная плотность вероятности первых двух производных процесса, $W_3[x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)]$ — совместная плотность вероятности процесса $x(t)$ и его первых двух производных.

Учитывая (8), (11)—(13), запишем в общем виде выражение для относительной погрешности:

$$\delta_j = \frac{\int_0^{T_0} p(\tau) d\tau \int_0^\infty d\dot{x}(t'_0) \int_0^{-\infty} \dot{x}(t'_0) \dot{x}(t'_1)}{\int_0^\infty \dot{x}(t) W_2[x_j, \dot{x}(t)] d\dot{x}(t)} \times$$

$$\times \frac{W_2[x_j, x_j, \dot{x}(t'_0), \dot{x}(t'_1)] d\dot{x}(t'_1) \int_0^T dt \int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) W_3[x_j, 0, \ddot{x}(t)] d\ddot{x}(t)}{\int_0^T dt \int_{-\infty}^0 \ddot{x}(t) W_3[x_{j-1}, 0, \ddot{x}(t)] d\ddot{x}(t)}$$

$$\frac{\int_0^{T_0} p(\tau) d\tau \int_0^\infty d\dot{x}(t_0) \int_0^{-\infty} \dot{x}(t_0) \dot{x}(t_1) W_2[x_{j-1}, x_{j-1}, \dot{x}(t_0), \dot{x}(t_1)] d\dot{x}(t_1)}{\int_0^\infty \dot{x}(t) W_2[x_{j-1}, \dot{x}(t)] d\dot{x}(t)}. \quad (14)$$

Здесь t'_0 и t'_1 — моменты первого и второго пересечений реализацией с положительной первой производной уровня x_j .

Таким образом, полученное общее выражение (14) связывает относительную погрешность определения плотности распределения максимумов в j -м коридоре с характеристиками процесса и параметрами анализатора.

Рассмотрим задачу в непосредственном применении к двум распространяемым моделям случайного процесса.

1. Пусть имеется нормальный широкополосный случайный процесс с нулевым средним $m_x = 0$, дисперсией σ^2 и плотностью распределения

$$W(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma) e^{-x^2/2\sigma^2}. \quad (15)$$

Зададим также конкретный вид корреляционной функции:

$$R(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau), \quad (16)$$

где $\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ — нормированная корреляционная функция, α — постоянный коэффициент.

Для такого процесса плотность распределения длительностей выбросов, превышающих заданный уровень, определяется выражением [2]

$$W(\tau, x_{j-1}) = -(1/4) \rho_0''(j-1)^2 \xi^2 \tau e^{(1/8)\rho_0''(j-1)^2 \xi^2 \tau^2}. \quad (17)$$

Здесь ρ_0'' — значение второй производной от коэффициента корреляции при $\tau = 0$, j — номер уровня, $\xi = h/\sigma$, h — ширина дифференциального коридора.

Подставляя значение $\rho_0'' = -2\alpha$ в (17), получим

$$W(\tau, x_{j-1}) = (1/2) \alpha (j-1)^2 \xi^2 \tau e^{-(1/4)\alpha(j-1)^2 \xi^2 \tau^2}. \quad (18)$$

Вычислим вероятность потерь экстремумов из j -го коридора согласно соотношению (11):

$$P_{\tau j} = \int_0^{T_0} p(\tau) W(\tau, x_{j-1}) d\tau = \int_0^{T_0} \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) \frac{1}{2} \alpha (j-1)^2 \xi^2 \tau e^{-(1/4)\alpha(j-1)^2 \xi^2 \tau^2} d\tau. \quad (19)$$

После интегрирования

$$P_{\tau j} = 1 - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-(1/4)\alpha(j-1)^2 \xi^2 \tau^2} d\tau. \quad (20)$$

Правая часть последнего выражения представляет собой интеграл, приводимый к табличному интегралу Лапласа. Введем обозначение $a_j = (1/4)\alpha(j-1)^2 \xi^2$ и запишем соотношение для вероятности потерь:

$$P_{\tau j} = 1 - \sqrt{2\pi} \Phi(T_0 \sqrt{2a_j}) / T_0 \sqrt{2a_j}, \quad (21)$$

$\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

Плотность распределения максимумов нормального широкополосного случайного процесса также подчинена нормальному закону. Учитывая последнее замечание, а также соотношения (8) и (21), получим выражение для относительной погрешности измерения плотности распределения максимумов:

$$\delta_j = \left[1 - \sqrt{2\pi} \Phi(T_0 \sqrt{2a_{j+1}}) / T_0 \sqrt{2a_{j+1}} \right] e^{-\xi^2(2j-1)/2} - \left[1 - \sqrt{2\pi} \Phi(T_0 \sqrt{2a_j}) / T_0 \sqrt{2a_j} \right]. \quad (22)$$

Рассмотрим верхний предел интегралов Лапласа, входящих в соотношение (22):

$$T_0 \sqrt{2} a_j = T_0 \sqrt{2(1/4)\alpha(j-1)^2 \xi^2}, \quad \xi = h/\sigma = 2x_m/(K\sigma) \quad (23)$$

($2x_m$ — динамический диапазон анализатора).

Для нормированной корреляционной функции вида $\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ постоянный коэффициент α связан с энергетической шириной спектра Δf_s процесса зависимостью [2]

$$\alpha = \pi(\Delta f_s)^2. \quad (24)$$

Введем обозначения: $F_0/\Delta f_s = \nu$, где $F_0 = 1/T_0$ — частота дискретизации; $x_m/\sigma = K_\pi$, $(j-1)/K = m_j$. Полученные коэффициенты имеют следующий физический смысл: ν — число отсчетов на период верхней частоты исследуемого процесса, K_π — коэффициент пиковости, m_j — коэффициент.

$$\left[\begin{array}{c} (1/\nu) K_\pi m_{j+1} \\ \left[\begin{array}{c} (1/\nu) K_\pi m_j \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (25)$$

Таким образом, полученная зависимость связывает относительную погрешность измерения плотности распределения максимумов с амплитудными и спектральными характеристиками нормального широкополосного случайного процесса и с основными параметрами анализатора.

2. Применяя аналогичные рассуждения, найдем зависимость погрешности анализа для нормального узкополосного случайного процесса с функцией корреляции

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2} \cos \omega_1 \tau. \quad (26)$$

В этом случае плотность распределения длительностей выбросов, превышающих уровень x_{j-1} , имеет вид

$$W(\tau, x_{j-1}) = (1/4)(2\alpha + \omega_1^2)(j-1)^2 \xi^2 \tau e^{-(1/8)(2\alpha + \omega_1^2)(j-1)^2 \xi^2 \tau^2}. \quad (27)$$

Тогда, учитывая (11), определим вероятность потерь максимумов из j -го коридора:

$$P_{\tau j} = 1 - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-(1/8)(2\alpha + \omega_1^2)(j-1)^2 \xi^2 \tau^2} d\tau. \quad (28)$$

Поскольку для узкополосного процесса энергетическая ширина спектра $\Delta f_s = \sqrt{\alpha/\pi} \ll f_1 = \omega_1/2\pi$, можно пренебречь величиной 2α по сравнению с ω_1^2 . Введя новые обозначения, получим

$$P_{\tau j} = 1 - \Phi((\pi\sqrt{2}/\nu)K_\pi m_j)/(\sqrt{\pi}/\nu)K_\pi m_j, \quad (29)$$

где $\nu = F_0/f_1$ — число отсчетов на период основной частоты процесса.

Плотность распределения максимумов в случае нормального узкополосного процесса описывается законом Рэлея:

$$W(x) = (x/\sigma) e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad (30)$$

а отношение значений плотности распределения в соседних коридорах будет иметь вид

$$W_{j+1}(H_+)/W_j(H_+) = (x_j/x_{j-1}) e^{-(x_j^2/2\sigma^2 - x_{j-1}^2/2\sigma^2)} = (j/(j-1)) e^{-2K_\pi^2((2j-1)/K^2)}. \quad (31)$$

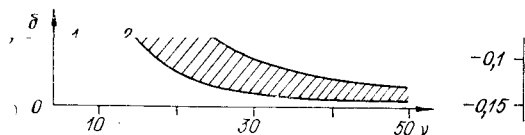


Рис. 2.

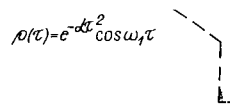


Рис. 3.

Учитывая (8), (29) и (31), запишем конечное выражение для относительной погрешности измерения плотности распределения максимумов нормального узкополосного случайного процесса:

$$\delta_j = \left[1 - \frac{\Phi((\pi \sqrt{2}/\nu) K_{\Pi} m_{j+1})}{(\sqrt{\pi}/\nu) K_{\Pi} m_{j+1}} \right] \frac{j}{j-1} e^{-2K_{\Pi}^2(2j-1)/K^2} - \left[1 - \frac{\Phi((\pi \sqrt{2}/\nu) K_{\Pi} m_j)}{(\sqrt{\pi}/\nu) K_{\Pi} m_j} \right]. \quad (32)$$

На рис. 2 изображены зависимости относительной погрешности от числа отсчетов на период (кривые 1, 2), рассчитанные на ЭВМ «Мир-2» по формулам (25) и (32) соответственно при $K_{\Pi} = x_m/\sigma = 3$ и $m_j = 1$ (т. е. для крайнего канала). Полученные выражения и зависимости относятся к нормальному процессу с граничными частотными свойствами (широкополосный и узкополосный). Очевидно, что для процессов с промежуточными спектральными характеристиками значения погрешности будут находиться внутри заштрихованной области на рис. 2. Представленные на рис. 3 кривые иллюстрируют характер изменения погрешности по динамическому диапазону ($0 \leq m_j \leq 1$) при фиксированном числе отсчетов на период $\nu = 12$. Результаты настоящей работы совпадают с частным случаем, рассмотренным в [3, 4] для квазигармонической модели сигнала.

В заключение следует отметить, что, как показывает сравнение, исследованная составляющая методической погрешности статистического анализа экстремумов, обусловленная дискретным методом измерения, в условиях реальных измерительных экспериментов может быть не только соизмерима с погрешностью, зависящей от конечности объема выборочных данных $\Delta_{\text{КВ}}$ [5], но и существенно превосходит последнюю. Вследствие этого оценка и учет рассматриваемой погрешности крайне важны. Полученные аналитические выражения (25) и (32) позволяют решать как прямую задачу оценки погрешности определения плотности распределения экстремумов, так и обратную — нахождение необходимой частоты дискретизации для обеспечения заданной допустимой погрешности анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цветков Э. И. Основы теории статистических измерений.— Л.: Энергия, 1979.
2. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов.— М.: Наука, 1970.
3. Жулев В. И., Садовский Г. А., Шлигерский Б. М. Исследование методической погрешности статистических анализаторов экстремумов.— В кн.: Тр. VII Всесоюз. симп. «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л.: ВНИИЭП, 1974.
4. Жулев В. И., Садовский Г. А., Шлигерский Б. М. Нормирование погрешности анализаторов экстремумов.— В кн.: Тр. VIII Всесоюз. симп. «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л.: ВНИИЭП, 1975.
5. Котюк А. Ф., Ольшевский В. В., Цветков Э. И. Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов.— М.: Энергия, 1967.

Поступила в редакцию 11 марта 1980 г.