ЛИТЕРАТУРА

1. **Библиотека** программ LIDA-2 по аппроксимации функций и цифровой фильтрации: Оперативно-информ. материал.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
2. **Василенко В. А.** Сплайн-функции: Теория, алгоритмы, программы.— Новосибирск: Наука, 1983.
3. **Лоран П.-Ж.** Аппроксимация и оптимизация.— М.: Мир, 1975.
4. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.
5. **Гордонова В. И., Морозов В. А.** Численные алгоритмы выбора параметра в методе регуляризации.— ЖВМиМФ, 1973, т. 13, № 3.
6. **Ковалков А. В.** Об одном алгоритме построения сплайнов с дискретными ограничениями типа неравенств.— Новосибирск, 1982. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, № 285).
7. **Schumaker L. L.** Spline functions: basic theory.— N. Y., 1981.
8. **Василенко В. А.** Локальные базисы в пространстве L-сплайнов.— В кн.: Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
9. **Роженко А. И.** Интерполяция рациональными сплайнами.— Новосибирск, 1983. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 430).
10. **Кондратьев В. П.** Приближение экспоненциальными суммами.— В кн.: Программы оптимизации (приближение функций). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1975, вып. 6.
11. **Ковалков А. В.** Функции Грина и сплайн-аппроксимации в многомерных областях.— Новосибирск, 1980. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 70).
12. **Петрак Л. В.** Приближение функций многих переменных рациональными дробями.— В кн.: Программы оптимизации (приближение функций). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1975, вып. 6.
13. **Бежаев А. Ю.** Оценки ошибки сплайн-интерполяции в многомерных ограниченных областях.— Новосибирск, 1983. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 102).
14. **Василенко В. А., Зюзин М. В.** Осредняющие операторы типа свертки и обработка экспериментальных кривых.— В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981.
15. **Зюзин М. В.** Осреднения, точные на полиномиальных сплайнах.— Новосибирск, 1981. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ; № 89).

Поступила в редакцию 10 ноября 1983 г.

УДК 621.391.519.6

В. А. ВИТТИХ, Б. В. КАЛИНИН, В. А. ЦЫБАТОВ

(Куйбышев)

ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕЙ СВЯЗИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Введение. Непрерывное усложнение систем связи различной природы неизбежно ведет к увеличению удельного веса межэлементной сети связи в общем балансе материальных затрат, расходуемых на создание распределенной системы. Основные задачи синтеза сети связи заключаются в определении ее топологии и плана размещения. Топология сети характеризует структуру ее связей, а план размещения — расположение ее элементов в монтажном пространстве. Условия реального проектирования исключают возможность совместного решения указанных задач и предопределяют последовательно-итерационную методику проведения структурной и метрической оптимизации сети связи распределенной системы. Последним обстоятельством объясняется факт самостоятельной значимости указанных задач и необходимость их независимого рассмотрения. В данной статье обсуждается задача метрической оптимизации сети связи.

Постановка задачи. При оценке эффективности сети связи по величине ее обобщенной стоимости, массе и т. п. задача метрической оптимизации сводится к минимизации функционала, характеризующего суммарную величину взвешенных длин межэлементных линий связи. Классификационным аналогом последней является задача размещения [1], которая заключается в минимизации функционала

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} c_{ij}\rho(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} s_{ik}\rho(w_i, v_k), \tag{1}$$

где c_{ij}, s_{ik} — неотрицательные коэффициенты; w_i, v_k — векторы координат перемещаемых и фиксированных элементов в R^2 соответственно; $\rho(\cdot)$ — функция, выполняющая роль оценки расстояний между элементами. При решении конкретных задач размещения выбор $\rho(\cdot)$ связан с метрическим аспектом трассировки межэлементных линий связи и, как правило, ограничен классом l_p-норм либо аппроксимирующими их функциями $l_{p\varepsilon}$ [2, 3] вида

$$l_{p\varepsilon}(w) = (|x|^p + |y|^p + \varepsilon)^{1/p}, \quad p > 1 \tag{2}$$

(здесь $w = (x, y) \in R^2$, $\varepsilon > 0$), позволяющими с любой требуемой точностью получить приближенные решения задач размещения для соответствующих норм. Заметим, что использование функций вида (2) позволяет явным образом учитывать технологические допуски, накладываемые на длины линий связи системы.

В практическом приложении к метрической оптимизации сетей связи традиционная модель задачи размещения требует дополнительного уточнения. Это вызвано, во-первых, необходимостью учета существующих пространственных ограничений на размещение перемещаемых элементов сети, а во-вторых, тем, что допустимые места расположения фиксированных элементов, как правило, не ограничены единственной точкой. Иными словами, существенными являются условия

$$w_i \in Q_i = \{w \in R^2 | g_{ik}(w) \leqslant 0,\ k = \overline{1,\ M_i}\}, \quad i = \overline{1,\ n}; \tag{3}$$

$$v_k \in P_k = \{v \in R^2 | p_{kj}(v) \leqslant 0,\ j = \overline{1, N_k}\}, \quad k = \overline{1, m,} \tag{4}$$

которые усложняют задачу размещения. В данной работе рассмотрены два метода ее решения: метод метрико-топологических преобразований, позволяющий свести исходную задачу к задаче безусловной минимизации, и метод поэлементной оптимизации, обладающий простой организацией вычислительного процесса.

Метод поэлементной оптимизации. Пусть $g_{ik}(\cdot)$, $p_{kj}(\cdot)$ — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции. Сформулируем теорему, которую при сделанном предположении можно трактовать как принцип оптимальности задачи (1), (3), (4), если $\rho(\cdot)$ определяется соотношением (2). Не теряя общности, считаем, что указанная задача эквивалентна следующей:

минимизировать

$$F(W) = F(w_1, \ldots, w_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} l_{p\varepsilon}(w_i - w_j) \tag{5}$$

при ограничениях (3).

Теорема 1. План размещения $W^* = (w_1^*, \ldots, w_n^*)$ — решение задачи (5), (3) тогда и только тогда, когда для любого $i = \overline{1, n}$

$$w_i^* = \operatorname*{argmin}_{w_i \in Q_i} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} l_{p\varepsilon}(w_i - w_j^*). \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость (6) очевидна. Рассмотрим достаточность. Так как $l_{p\varepsilon}(\cdot)$, $g_{ik}(\cdot)$ — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции, то для того, чтобы $W^* = (w_1^*, \ldots, w_n^*)$ являлось решением задачи (5), (3), достаточно существования таких $\lambda_{jh}^* \geqslant 0$, при которых

$$\frac{\partial F(W^*)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j}\lambda_{jk}^*\frac{\partial g_{jk}(W^*)}{\partial x_i}=0,\quad i=\overline{1,n};$$

$$\frac{\partial F(W^*)}{\partial y_i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j}\lambda_{jk}^*\frac{\partial g_{jk}(W^*)}{\partial y_i}=0,\quad i=\overline{1,n};$$

$$\lambda_{jk}^* g_{jk}(W^*)=0,\quad j=\overline{1,n},\quad k=\overline{1,M_j}.$$

Данная система уравнений равносильна следующей:

$$\frac{\partial F_i(W^*)}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{M_i}\lambda_{ik}^*\frac{\partial g_{ik}(w_i^*)}{\partial x_i}=0,$$

$$\frac{\partial F_i(W^*)}{\partial y_i}+\sum_{k=1}^{M_i}\lambda_{ik}^*\frac{\partial g_{ik}(w_i^*)}{\partial y_i}=0,$$

$$\lambda_{ik}^* g_{ik}(w_i^*)=0,\quad k=\overline{1,M_i}$$

для $i=\overline{1,n}$, где $F_i(W)=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}l_{p\varepsilon}(w_i-w_j)$. Однако если условие (6) выполняется, то для любого $i=\overline{1,n}$ такие $\lambda_{ik}^*\geqslant 0$, $k=\overline{1,M_i}$, существуют, следовательно, план размещения W^* является решением задачи (5), (3). Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет теоретически обосновать сходимость метода поэлементной оптимизации задачи (5), (3), который предполагает:

Шаг 1. Присвоить $k=0$ и задать начальный план размещения элементов $W^{(0)}=(w_1^{(0)},\ldots,w_n^{(0)})$.

Шаг 2. Положить $k=k+1$ и для всех $i=\overline{1,n}$ выполнить действия шагов 3, 4.

Шаг 3. Найти w_i^*, для которого

$$F_i(w_1^{(k)},\ldots,w_{i-1}^{(k)},w_i^*,w_{i+1}^{(k-1)},\ldots,w_n^{(k-1)})=$$
$$=\min_{w_i\in Q_i}\left[\sum_{j=1}^{i-1}c_{ij}l_{p\varepsilon}(w_i-w_j^{(k)})+\sum_{j=i+1}^{n}c_{ij}l_{p\varepsilon}(w_i-w_j^{(k-1)})\right].$$

Шаг 4. Если

$$F_i(w_1^{(k)},\ldots,w_{i-1}^{(k)},w_i^*,w_{i+1}^{(k-1)},\ldots,w_n^{(k-1)})=F_i(w_1^{(k)},\ldots,w_{i-1}^{(k)},w_i^{(k-1)},\ldots,w_n^{(k-1)}),$$

то $w_i^{(k)}=w_i^{(k-1)}$, в противном случае $w_i^{(k)}=w_i^*$.

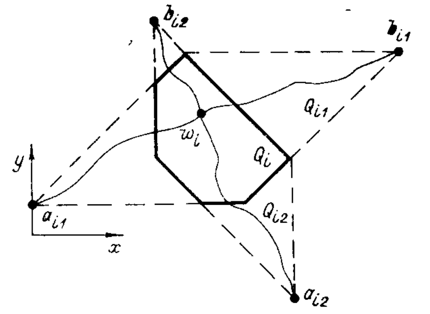
Шаг 5. Если $F(W^{(k)})<F(W^{(k-1)})$, то перейти на шаг 2. В противном случае $W^{(k)}$ — решение задачи (5), (3).

Очевидно, что в силу теоремы 1 и выпуклости функций $F(W)$ и $g_{ik}(\cdot)$ рассмотренный метод обладает свойством предельной сходимости к оптимальному решению задачи (5), (3) либо сходится к нему за конечное число шагов.

Метод метрико-топологических преобразований. Метод метрико-топологических преобразований позволяет свести задачу размещения с ограничениями к эквивалентной по решению задаче без ограничений при условии, что допустимые области имеют вид выпуклых многоугольников, стороны которых параллельны либо координатным осям, либо биссектрисам углов между ними. Содержательная сторона метода такова:

1. Для каждого перемещаемого элемента задачи формируется совокупность дополнительных элементов.

2. Устанавливаются связи между соответствующими дополнительными и исходными элементами. Весовой коэффициент этих связей берется равным T_p.



Формирование дополнительных элементов a_{ik}, b_{ik}, $k=\overline{1,2}$, и связей для перемещаемого элемента w_i и ограничения Q_i.

3. Строится новый критерий оптимальности задачи, который отличается от первоначального величиной взвешенной суммарной длины введенных связей.

4. Решается задача размещения без ограничений для нового критерия оптимальности, и получаемый при этом оптимальный план является решением исходной задачи с ограничениями.

Не останавливаясь на деталях методики построения дополнительных элементов, которая иллюстрируется рисунком, рассмотрим обоснование метода метрико-топологических преобразований.

Теорема 2. Если разрешенную область Q_i можно представить следующим образом:

$$Q_i = Q_{i1} \cap Q_{i2}, \quad i=\overline{1, n}, \tag{7}$$

а

$$Q_{ik} = \{w \in R^2 | l_{1-\infty}(a_{ik}-w) + l_{1-\infty}(b_{ik}-w) = l_{1-\infty}(a_{ik}-b_{ik})\}, \tag{8}$$

$k=1,\ 2$, где $l_{1-\infty}(\cdot) = l_1(\cdot) + \sqrt{2} l_\infty(\cdot)$; $a_{ik},\ b_{ik} \in R^2$, то при любом способе определения функции $\rho(\cdot)$ в виде l_p-нормы ($p \geqslant 1$) существует такое $T_p < \infty$, при котором решение задачи

минимизировать

$$L(W) + T_p \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} (l_{1-\infty}(a_{ik}-w_i) + l_{1-\infty}(b_{ik}-w_i)) \tag{9}$$

является решением задачи

минимизировать

$$L(W) = L(w_1, \ldots, w_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} l_p (w_i - w_j) \tag{10}$$

при ограничениях (3).

Доказательство. Пусть $W' = (w'_1, \ldots, w'_n)$ и $W'' = (w''_1, \ldots, w''_n)$ — два некоторых плана размещения. Тогда

$$|L(W') - L(W'')| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} l_p (w'_i - w'_j - w''_i + w''_j) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} (l_p(w'_j - w''_j) + l_p(w'_i - w''_i)) \leqslant Cn \sum_{i=1}^{n} l_p(w'_i - w''_i).$$

Здесь $C = \max\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} c_{ij}$.

Так как для любого $p \geqslant 1$ в R^m справедливо неравенство [4]

$$l_p(w) \leqslant m^{1/p} l_\infty(w),$$

то

$$|L(W') - L(W'')| \leqslant \sqrt[p]{2}\, nC \sum_{i=1}^{n} l_\infty (w'_i - w''_i). \tag{11}$$

С другой стороны, если условия (7), (8) выполняются, то легко показать, что для любого $i = \overline{1, n}$

$$A_i(w'_i) \geqslant A_i(w^0_i) + (2 - \sqrt{2})\, l_\infty(w^0_i - w'_i),$$

где

$$A_i(w_i) = \sum_{k=1}^{2} l_{1-\infty}(a_{ik} - w_i) + l_{1-\infty}(b_{ik} - w_i),$$

$$w^0_i = \operatorname*{argmin}_{w_i \in Q_i} l_{1-\infty}(w_i - w'_i).$$

Это означает, что для любого плана размещения $W' = (w_1', \ldots, w_n')$ существует план $W^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0)$, при котором

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(w_i') \geqslant \sum_{i=1}^{n} A_i(w_i^0) + \sum_{i=1}^{n} l_\infty(w_i' - w_i^0), \tag{12}$$

причем $w_i^0 \in Q_i$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, при $T_p \geqslant \sqrt[p]{2}\, nC/(2 - \sqrt{2})$ с учетом (11), (12)

$$|F(W') - F(W^0)| \leqslant T_p \sum_{i=1}^{n} (A_i(w_i') - A_i(w_i^0))$$

и для плана размещения $W^* = (w_1^*, \ldots, w_n^*)$, доставляющего минимум функционалу (9), выполняется условие $w_i^* \in Q_i$, $i = \overline{1, n}$.

Поскольку при выполнении (7), (8) для $w_i \in Q_i$ $A_i(w_i) = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$, то план размещения $W^* = (w_1^*, \ldots, w_n^*)$ является также и решением задачи (10), (3). Теорема доказана.

Данная теорема оговаривает виды разрешенных областей ((7), (8)), для которых применим метод метрико-топологических преобразований. Разрешенные области должны принадлежать классу выпуклых многоугольников, стороны которых параллельны либо координатным осям, либо биссектрисам углов между ними. Такие ограничения на вид разрешенных областей Q_i, $i = \overline{1, n}$, не являются жесткими. Практика решения задач размещения показала, что монтажное пространство даже таких сложных объектов, как самолет или автомобиль, может быть с приемлемой точностью аппроксимировано упомянутыми многоугольниками.

Заключение. Описанные выше методы метрической оптимизации сетей связи позволяют при малых затратах машинного времени вычислять оптимальный план размещения элементов распределенной системы. Метод метрико-топологических преобразований оказывается работоспособным для достаточно широкого спектра пространственных ограничений. Алгоритмы указанных методов реализованы программно и использовались при проектировании топологической схемы бортовых систем сбора и обработки информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Исследование** операций: Пер. с англ./Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.— М.: Мир, 1981.
2. **Love R.** The dual of a huperbolic approximation to the generalized constrained multi-facility location problem with lp distances.— Management Sci., 1974, vol. 21, N 1.
3. **Love R., Morris J. G.** Solving constrained multi-facility location problems involving lp distances using convex programming.— Operat. Research, 1975, vol. 23, p. 581—587.
4. **Треногин В. А.** Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 26 апреля 1984 г.

УДК 519.218 : 519.854

А. Д. ВАЙНШТЕЙН, А. Н. ЕФИМОВ

(Москва)

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ РАССТАНОВКЕ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ В СЕТИ

При наблюдении случайных потоков в сети часто приходится определять оптимальное расположение измерителей по элементам сети. Такая задача возникает, например, при построении АСУ магистрального