



Рис. 5.

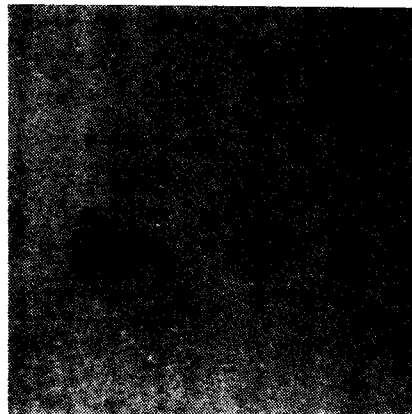


Рис. 6.

фильтрации: на выходе фильтра не просто поточечная разность двух изображений, а выражения вида

$$C_1(ij) = \min_{\Omega} \{\widehat{F}[A(ij)] - B(i + \Omega, j + \Omega)\},$$

$$C_2(ij) = \min_{\Omega} \{B(ij) - \widehat{F}[A(i + \Omega, j + \Omega)]\},$$

где  $\Omega$  принимает значения в диапазоне допустимой ошибки координатного совмещения. После применения фильтра  $G_1$  из разности удаляются контуры с характерной шириной  $\Omega$  и частично искажаются отличия, имевшие место в изображении  $B$ . В результате применения второго фильтра искажаются отличия в изображении  $A$ . На рис. 6 представлен результат логического объединения двух полученных результатов:

$$C(ij) = \max \{C_1(ij), C_2(ij)\}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи.— М.: Наука, 1973, т. 1.
2. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление.— М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 12 января 1984 г.

УДК 519.246.5 : 519.21 : 57

**В. А. ИВАНОВ**  
(Новосибирск)

### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТИПА РАЗМЕЩЕНИЯ ДРЕВОСТОЯ ПО АЭРОФОТОСНИМКАМ ЛЕСА

**Введение.** В ряде практических задач морфологии леса необходим анализ пространственного размещения деревьев на заданном участке. Принято рассматривать три типа размещений объектов (представимых точками) на плоскости: случайное ( $P_0$ ), групповое ( $P_1$ ) и регулярное ( $P_2$ ). Возрастные изменения древостоя можно представить в виде смены типов размещений, например:

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_2 \rightarrow P_2 + P_1.$$

Исходя из предварительного анализа аэрофотоснимков участков леса [1], примем следующие модели типов размещений.

1.  $P_0$  — точки распределены согласно закону Пуассона с параметром  $\lambda$ , где  $\lambda$  — среднее число точек в единице площади.

2.  $P_1$  — распределения точек внутри группы и «центров» групп подчинены закону Пуассона с соответствующими параметрами.

3. Регулярное размещение можно получить двумя путями:

а)  $P_{2a}$  — точки располагаются в узлах регулярной решетки со случайными смещениями;

б)  $P_{2b}$  — размещение формируется из случайно расположенных центров непересекающихся кругов с заданным радиусом  $R_0$ .

Размещение  $P_{2a}$  более соответствует искусственным лесопосадкам, а  $P_{2b}$  — спелым лесам с заканчивающимся конкурентным ростом. Для модели случайного точечного поля, подчиняющегося закону Пуассона, существует значительное число критериев [2—4], проверяющих согласие наблюдаемых данных с такой моделью (проверка нулевой гипотезы  $H_0$ ). Для группового и регулярного размещений не получено (как в предыдущем случае) моделей, использующих расстояния между точками и позволяющих строить критерии проверки соответствия реальных данных этим моделям. В [3] описана модель группового размещения, в соответствии с которой распределение числа точек в элементарной площадке подчиняется отрицательно-биномиальному распределению. Указанная модель основана на предположении, что группы и точки в группах подчинены закону Пуассона, а плотность точек в группах имеет гамма-распределение. В [4] дан обзор и проведен сравнительный анализ ряда критериев (использующих расстояния между точками для малых выборок), проверяющих согласие реальных размещений с  $H_0$  против альтернатив  $H_1$  и  $H_2$  (групповое или регулярное размещение соответственно). Однако рассматриваемые в [4] критерии не могут указать тип размещения (при отклонении нулевой гипотезы), что связано с отсутствием моделей, соответствующих альтернативным гипотезам.

В данной работе предлагается подход, основанный на оценивании параметров распределений до первого ближайшего соседа, позволяющий оценить степень отличия исходного точечного поля от  $P_0$  и определить тип размещения в рамках принятых моделей.

**Определения, предварительные замечания.** Для случайного поля точек, подчиняющегося закону Пуассона, распределение расстояний  $r_s$  до ближайшего  $s$ -го соседа описывается выражением [2]

$$f(r_s, s, \lambda) = \frac{2(\pi\lambda)^s r_s^{2s-1}}{\Gamma(s)} \exp(-\pi\lambda r_s^2), \quad (1)$$

а случайная величина  $t_s = r_s^2$  распределена как

$$\varphi(t_s, s, \lambda) = \frac{(\pi\lambda)^s t_s^{s-1}}{\Gamma(s)} \exp(-\pi\lambda t_s), \quad (2)$$

$\lambda$  — среднее число точек в единичной площадке. Для проверки нулевой гипотезы  $H_0$  против альтернатив  $H_1$  и  $H_2$  ( $H_0: \hat{f} = f$  или  $H_0: \hat{\varphi} = \varphi$  с параметрами  $s = s_0 = 1, \lambda = \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — плотность точек для поля  $P_0(\lambda_0 = N/A)$ ) можно воспользоваться критериями  $\chi^2$  или Колмогорова — Смирнова. Если гипотеза  $H_0$  отвергается, то вопрос о типе размещения остается открытым.

Использование первых четырех моментов выборочных распределений расстояний до первого соседа при определении типа размещения оказалось неудачным из-за неустойчивости метода даже для моделей точечных полей. Поэтому определение типа размещения будем основывать на оценивании параметров  $\lambda$  и  $s$  распределения (2), которые для рассматриваемых типов размещений лежат в различных областях плоскости  $(\lambda, s)$ .

Если  $P$  отлично от  $P_0$ , то параметры  $s$  и  $\lambda$  будут отличны от  $s_0 = 1$  и  $\lambda_0$ . В рамках принятых моделей можно сделать ряд предположений

относительно распределений расстояний до ближайшего соседа. Если число пересекающихся групп невелико, то для группового размещения можно предположить, что функции (1), (2) будут описывать распределение расстояний до ближайшего соседа с параметрами  $\lambda > \lambda_0$  и  $s \approx 1$ . Это следует из выражения

$$\varphi(t_s, s, \lambda) = (1/\lambda_g) \int_0^{\lambda_g} \varphi^*(t_s, s, \lambda) d\lambda = \varphi^*(t_s, s, \lambda^*),$$

где  $\varphi^*(t_s, s, \lambda)$  — плотность распределения  $t_s$  в группе,  $\lambda^*$  — величина плотности в интервале  $(0, \lambda_g)$ . Регулярное размещение можно представить как случайное поле точек, в котором отсутствуют первые ближайшие соседи, т. е. распределение величин  $r_s$  и  $t_s$  можно представить выражениями (1) и (2), но с  $s > s_0$  и  $\lambda$ , отличающимся от  $\lambda_0$ .

Так как используемое гамма-распределение аппроксимирует широкий класс функций, то можно надеяться, что (1) или (2) будет описывать распределения расстояний для рассматриваемых моделей ( $P_1$  и  $P_2$ ), а значения параметров  $s$  и  $\lambda$  позволят определить тип размещения. В этой связи необходимо решить ряд вопросов: по результатам моделирования найти области параметров  $s$  и  $\lambda$ , соответствующие принятым размещениям; разработать процедуру оценивания  $s$  и  $\lambda$  по выборочному распределению расстояний; получить оценки дисперсий параметров, необходимых для определения типа размещения.

**Параметры моделирования.** Случайные поля ( $P_0, P_1, P_{2a, 6}$ ) будем моделировать на целочисленной решетке  $A = 1024 \times 1024$  точки, что связано с дискретным характером координат, получаемых по аэрофотоснимкам, а также с тем, что таксационные данные о координатах при наземных измерениях содержат не более трех значащих десятичных цифр. Для группового размещения примем, что число точек в группе случайно и не превышает 20. Выбор максимального числа точек в группе связан с тем, что средний размер группы в реальном древостое колеблется от 5 до 15 объектов. Общее количество точек  $N$  будет от 300 до 600, что является предельным числом для наземной таксации.

**Оценивание и нулевое приближение параметров.** В качестве критерия при оценивании  $s$  и  $\lambda$  взят критерий  $\chi^2$ , позволяющий контролировать согласие выборочного распределения с гамма-распределением. Для оценивания использовалась итерационная процедура Ньютона. Параметры в процедуре Ньютона изменялись в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \lambda_n - D_\lambda(\Delta\chi^2/\Delta\lambda)/(\Delta^2\chi^2/(\Delta\lambda)^2), \\ s_{n+1} &= s_n - D_s(\Delta\chi^2/\Delta s)/(\Delta^2\chi^2/(\Delta s)^2), \end{aligned}$$

где  $\Delta\chi^2/\Delta\lambda$ ,  $\Delta\chi^2/\Delta s$ ,  $\Delta^2\chi^2/(\Delta\lambda)^2$ ,  $\Delta^2\chi^2/(\Delta s)^2$  — первые и вторые разности. Для улучшения сходимости параметры  $D_\lambda$ ,  $D_s$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta s$  могут изменяться в процессе минимизации. Исходное и теоретическое распределения приводятся к равномерному, что улучшает сходимость процедуры.

Из проведенного предварительного анализа следует, что для «произвольных» (например,  $\hat{\lambda}^0 = \lambda_0$ ,  $\hat{s}^0 = 1$ ) начальных значений оцениваемых параметров предлагаемые процедуры могут сходиться к локальному минимуму. Для того чтобы не усложнять процедуру минимизации, необходимо задавать такое начальное приближение параметров, которое позволяло бы находить глобальный минимум. Для получения приемлемого начального приближения  $\hat{s}^0$  и  $\hat{\lambda}^0$  используем два первых центральных момента выборочных распределений расстояний.

Для распределения  $t_s = r_s^2$  моменты имеют вид  $M_1 = s/\pi\lambda$ ,  $M_2 = s/(\pi\lambda)^2$ , на основании которых нетрудно получить

$$\hat{s}^0 = \widehat{M}_1^2/\widehat{M}_2, \quad \hat{\lambda}^0 = \widehat{M}_1/\pi\widehat{M}_2, \quad (3)$$

где  $\widehat{M}_1, \widehat{M}_2$  — оценки моментов по исходной выборке. В случае распределения  $r_s$  моменты записываются как

$$M_1 = (1/\sqrt{\pi\lambda})(\Gamma(s+1/2)/\Gamma(s)), \quad M_2 = (1/\pi\lambda)(s - (\Gamma(s+1/2)/\Gamma(s))^2),$$

а приближенные оценки  $\widehat{\lambda}^0, \widehat{s}^0$  будут иметь вид

$$\widehat{s}^0 = 0,26\widehat{M}_1^2/\widehat{M}_2, \quad \widehat{\lambda}^0 = \widehat{s}^0/\pi r_s^2. \quad (4)$$

При получении (4) использована аппроксимация  $s/(\Gamma(s+1/2)/\Gamma(s))^2 - 1 \approx 0,265$ , точность которой не хуже 10% в необходимом диапазоне  $s$  ( $0,5 \div 20$ ).

Непосредственное использование (3), (4) в качестве начального приближения не всегда приводит к глобальному минимуму. Поэтому проводится коррекция оценок (3) или (4) путем повторного вычисления  $\widehat{M}_1, \widehat{M}_2$  с исключением расстояний, удовлетворяющих неравенству

$$r_i > \bar{r} + K\widehat{\sigma}_r, \quad K = 3,5 \div 4.$$

Процедуры оценивания  $\lambda$  и  $s$  с начальным приближением, учитывающим «аномальные расстояния», практически всегда сходятся к глобальному минимуму.

**Дисперсии параметров.** Для получения дисперсий параметров воспользуемся методом максимального правдоподобия, который в данном случае эквивалентен отысканию минимума  $\chi^2$  для функции правдоподобия [4]:

$$L = \prod_{i=1}^m P_i^{v_i},$$

где  $v_i$  — наблюдаемые частоты,  $P_i(t, s, \lambda)$  — соответствующие вероятности  $\left(\sum_{i=1}^m P_i = 1\right)$  на интервалах разбиения  $h_i$ ,  $m$  — число групп выборки. Отметим, что ковариационные матрицы для распределений (1) и (2) совпадают, поэтому для определенности будем использовать распределение  $\Phi(t, s, \lambda)$ . Для получения приближенного решения заменим  $P_i = \int_{h_i} \varphi(t, s, \lambda) dt$  на  $\varphi(t_i, s, \lambda)h_i$ , тогда

$$\Phi = \ln L = \sum_{i=1}^m v_i (s \ln \lambda + s \ln \pi + (s-1) \ln t_i - \pi \lambda t_i - \ln \Gamma(s) + \ln h_i).$$

Вторые производные от  $\Phi$  по  $\lambda$  и  $s$  имеют вид

$$M \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} \right\} = M \left\{ - \sum_{i=1}^m v_i \frac{s}{\lambda^2} \right\} = -Ns/\lambda^2, \quad M \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial s} \right\} = M \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\lambda} \right\} = N/\lambda,$$

$$M \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \right\} = M \left\{ - \sum_{i=1}^m v_i G(s) \right\} = -NG(s).$$

Здесь  $G(s) = (\ln \Gamma(s))''_s$ . Ковариационная матрица оценок параметров есть

$$D^{-1} = \begin{Bmatrix} NG(s)/\Delta & N/\lambda\Delta \\ N/\lambda\Delta & Ns/\lambda^2\Delta \end{Bmatrix},$$

где  $\Delta = \lambda^2 G(s)/N^2 (sG(s) - 1)$  — определитель матрицы  $D$ .

Для дисперсий оценок получаем следующие выражения:

$$\sigma_\lambda^2 = \lambda^2 G(s)/N (sG(s) - 1), \quad (5)$$

$$\sigma_s^2 = s/N (sG(s) - 1). \quad (6)$$

Тип размещения (изменяемый па- раметр)	Значения изменяе- мых па- раметров	$\bar{\lambda}$	$\hat{\sigma}_{\lambda}$	$\bar{s}$	$\hat{\sigma}_s$	$\bar{\chi}^2$
$P_1(A_G)$ $\lambda_0 = 0,000286$ $s_0 = 1$	20×20	0,02204	0,00405	0,886	0,113	21,81
	30×30	0,00972	0,00245	0,974	0,143	31,85
	40×40	0,00559	0,00104	0,8804	0,107	23,61
	60×60	0,0025	0,00058	0,858	0,113	23,58
	80×80	0,00152	0,00044	0,941	0,148	23,13
	100×100	0,000967	0,00016	0,884	0,118	30,35
	120×120	0,000762	0,000145	0,893	0,114	26,36
	140×140	0,00053	0,0000958	0,816	0,073	27,97
	160×160	0,00047	0,000073	0,861	0,0916	31,64
$P_{2a}(Z_{\max})$ $\lambda_0 = 0,000275$ $s_0 = 1$	30	0,00139	0,000134	10,21	0,997	25,23
	40	0,00076	0,00009	5,016	0,631	29,91
	50	0,000468	0,000065	2,73	0,392	21,46
	60	0,000326	0,000052	1,72	0,292	28,98
	80	0,00021	0,000019	0,998	0,061	34,8
	100	0,00024	0,000021	1,058	0,05	23,31
	120	0,000255	0,000044	1,12	0,146	27,12
$P_{26}(2R_0)$ $\lambda_0 = 0,000286$ $s_0 = 1$	5	0,000308	0,000034	1,09	0,096	24,15
	10	0,0004	0,000046	1,442	0,15	35,05
	15	0,000504	0,000054	1,9581	0,135	31,14
	20	0,00068	0,000075	2,85	0,276	44,66
	25	0,00086	0,000089	4,11	0,388	58,54
	30	0,00119	0,00014	6,5	0,657	61,8
	35	0,00160	0,00016	10,07	0,753	65,5

Для вычислений  $G(s)$  можно воспользоваться представлением  $G(s)$  в виде  $\psi$ -функции Эйлера, т. е.

$$G(s) = \psi'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s+k)^2}.$$

Довольно грубым приближением  $\psi'(s)$  может служить выражение

$$\psi'(s) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{(s+k)^2} + \frac{1}{(s+l+1/2)},$$

где  $l$  — конечное число и зависит от задаваемой ошибки приближения.

**Обсуждение результатов моделирования.** При моделировании было принято  $A = 1024 \times 1024$ ,  $N = 300$ , что соответствует  $\lambda_0 = 0,000286$ ,  $s_0 = 1$  для размещения  $P_0$ . Координаты точек поля  $P_0$  формировались с помощью датчика случайных чисел с равномерным распределением. Для 10 имитаций размещения  $P_0$  получены следующие значения средних значений и СКО:  $\bar{\lambda} = 0,0003064$ ,  $\hat{\sigma}_{\lambda} = 0,0000603$ ,  $\bar{s} = 1,0169$ ,  $\hat{\sigma}_s = 0,1203$ ,  $\bar{\chi}^2 = 25,65$  ( $n = 14$ ,  $n$  — число степеней свободы). В таблице приведены результаты моделирования (выполнявшегося, как и для  $P_0$ ) размещений  $P_1$ ,  $P_{2a}$ ,  $P_{26}$ . Для размещения  $P_1$  число точек в группе задавалось равномерным датчиком случайных чисел в диапазоне  $2 \div 20$ , а изменяемым параметром была максимально возможная область  $A_G$  (квадрат), на которой размещалась очередная группа. При моделировании размещений  $P_{2a}$  ( $N = 289$ , т. е.  $\lambda_0 = 0,000275$ ) смещение точек от узлов квадратной решетки было случайным с максимальным размахом относительно узла решетки  $Z_{\max}$ . Размещение  $P_{26}$  формировалось, как и  $P_0$ , но с условием, что в круге радиусом  $R_0$  не содержится других точек.

Из результатов моделирования, представленных таблицей, следует, что для принятых размещений существуют области параметров  $\lambda$  и  $s$ , которые соответствуют размещениям  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_{2a,6}$ . Степень отличия исследуемого (предъявляемого) размещения  $P$  будет зависеть от отношений

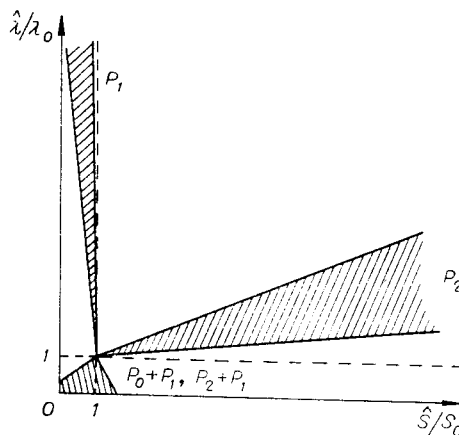
$\hat{\lambda}/\lambda_0$  и  $\hat{s}/s_0$ . Для определения типа размещения необходимо проверить гипотезы:

$$H_0: \hat{s}/s_0 = 1, \quad \hat{\lambda}/\lambda_0 = 1;$$

$$H_1: \hat{s}/s_0 \leq 1, \quad \hat{\lambda}/\lambda_0 > 1;$$

$$H_2: \hat{s}/s_0 > 1, \quad \hat{\lambda}/\lambda_0 \geq 1.$$

С помощью моделирования было установлено, что область параметров  $\hat{\lambda}/\lambda_0 < 1, 0 \leq s/s_0 \leq 1,5$  соответствует «смесям» размещений  $P_0 + P_1, P_2 + P_1$ . На рисунке представлено схематическое изображение областей значений отношений  $\hat{\lambda}/\lambda_0$  и  $\hat{s}/s_0$  для рассмотренных типов размещений.



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. А., Иванченко Г. А. Математическое обеспечение статистического анализа аэрофотоснимков леса.— Автотметрия, 1972, № 4.
2. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности.— М.: Наука, 1972.
3. Getis A., Boots B. Models of spatial processes.— Cambridge: University Press, 1978.
4. Грабарник П. Я., Комаров А. С. Статистический анализ пространственных структур. (Методы, использующие расстояния между точками).— Пушкино, 1980. (Препринт/АН СССР, Научный центр биологических исследований).
5. Крамер Г. Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 9 января 1984 г.

УДК 681.327.521

В. П. КОСЫХ  
(Новосибирск)

### СТРУКТУРА ФОТОМЕТРИЧЕСКОГО КАНАЛА БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩЕГО МИКРОДЕНСИТОМЕТРА И ОШИБКИ ФОТОМЕТРИРОВАНИЯ

При создании быстродействующих прецизионных фотометрических устройств, к которым относятся, в частности, сканирующие микроденситометры, используемые в автоматизированных системах обработки изображений в качестве устройств ввода, появляется необходимость в обеспечении двух противоречивых требований: высокой производительности и высокой точности измерений. В связи с этим возникает задача подробного анализа факторов, влияющих на производительность и точность измерительного канала устройства, а также выбора такой его структуры, которая бы обеспечивала в некотором смысле оптимальное соотношение между требуемыми параметрами канала и сложностью его реализации.

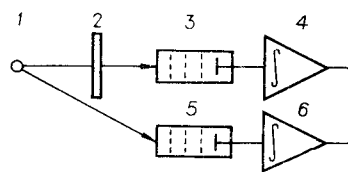


Рис. 1.

Рассмотрим систему фотометрирования (рис. 1), состоящую из источника света 1, исследуемого образца 2, фотоэлектронного умножителя (ФЭУ) 3 и интегратора 4 (интегратор необходим для накопления выходного заряда ФЭУ в течение времени изме-