дить коммутацию блоков системы, задание режимов и функций этих блоков, а также управление вводом/выводом информации. При работе с системой возможно активное участие оператора как на стадии задания режимов работы, так и при визуальной оценке реакции на выбранный режим.

Для облегчения практической работы с видеосистемой реализованы макрооператоры, задающие последовательность операторов, результатом которых являются элементарные действия над изображениями, например накопление определенного числа кадров; построение профиля интенсивности изображения в вертикальном или горизонтальном сечении; построение гистограмм интенсивности вдоль диагонали кадра; чтение и сброс изображений на магнитную ленту; выделение фрагментов изображения при помощи меток; вывод функции НПИ на монитор; операции программной свертки изображения.

Кроме того, реализованы операторы, осуществляющие с помощью НПИ нормирование визуализируемого изображения по яркости (посредством определения точек минимальной и максимальной яркости на диагонали изображения); выделение на визуализируемом изображении участков одинаковой интенсивности; преобразование полутонового изображения в двухградационное (битовое); логарифмирование и потенцирование изображений; преобразование интенсивности изображения по произвольному закону, задаваемому графиком на входе ТВ-камеры и т. д.

Для хранения часто используемых управляющих программ применен кассетный магнитофон РК-1, управляемый через КАМАК-модуль последовательной связи.

В настоящее время видеосистема находится в опытной эксплуатации. С ее помощью, например, проведены эксперименты по накоплению и выделению объектов при астрофизических исследованиях (совместно с САО АН СССР), по улучшению резкости изображений и т. п.

Авторы выражают благодарность А. И. Чернышеву и Е. М. Орлову за участие в разработке технической документации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баглай Р. Д. и др.** Цифровая видеосистема регистрации, обработки и отображения оптической информации.— В кн.: Автоматизация научных исследований на основе применения ЭВМ: Тез. докл. VI Всесоюз. конф. Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1981.
2. **Ефремов А. П., Касперович А. Н., Литвинов Н. В., Шалагинов Ю. А.** Широкополосный аналого-цифровой преобразователь.— Автометрия, 1981, № 6.
3. **Касперович А. Н., Солоненко В. И.** Крейт-контроллер к ЭВМ «Электроника-60».— В кн.: Автоматизация научных исследований на основе применения ЭВМ: Тез. докл. V Всесоюз. конф. Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1979.
4. **Подольский Л. И.** Система QUASIC для программирования на микро-ЭВМ.— Пущино, 1980.

Поступила в редакцию 30 декабря 1983 г.

УДК 771.537

М. Л. АГРАНОВСКИЙ

(Новосибирск)

КОРРЕКЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ЗАВИСИМЫХ ИСКАЖЕНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ДВИЖУЩИХСЯ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1. Введение. Изучению влияния движения регистрирующей системы относительно объекта на формирование изображения и проблеме коррекции возникающих при этом искажений посвящен ряд работ по обработке изображений [1—3]. Значение исследования эффектов движения связано, в частности, с удлинением экспозиций, необходимых при астрономических наблюдениях, фотографировании слабоизлучающих объектов с космических или иных летательных аппаратов и т. п.

Общей математической моделью формирования изображения в линейной некогерентной оптической системе служит интегральное уравнение

$$\int K(x, y)\, u(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

где $u(y)$ — исходное распределение интенсивности объекта; $f(x)$ — распределение яркости изображения, зарегистрированного системой; $K(x, y)$ — отклик системы в точке изображения $x=(x_1, x_2)$ на импульс в точке объекта $y=(y_1, y_2)$. В предположении постоянства потока мощности, концентрируемого оптической системой в процессе отображения, интенсивность изображения определяется распределением яркости на траекториях, описываемых точками объекта, и выражается следующим интегралом [1]:

$$\int_0^T u(\mathbf{s}(x, t))\, J(x, t)\, dt = f(x). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{s}(x, t)=(s_1(x, t), s_2(x, t))$ — вектор-функция, задающая движение: $y_1=s_1(x, t)$, $y_2=s_2(x, t)$, $t\in[0, T]$, где $[0, T]$ — интервал экспозиции; $J(x, t)$ — якобиан,

$$J(x, t)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial s_1(x, t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial s_1(x, t)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial s_2(x, t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial s_2(x, t)}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Проанализируем наиболее простой случай, когда происходит параллельный перенос в плоскости, параллельной плоскости изображения, вдоль кривой, задаваемой уравнениями $y_1=s_1(t)$, $y_2=s_2(t)$. Тогда исходное распределение $u(y)$ и распределение $f(x)$ интенсивности изображения, получаемого на выходе системы, связаны соотношением

$$\int_0^T u(x-\mathbf{s}(t))\, dt = f(x). \tag{3}$$

Применяя к обеим частям равенства (3) преобразование Фурье, получим

$$\widehat{u}(\lambda)\int_0^T e^{-i(s_1(t)\lambda_1+s_2(t)\lambda_2)}dt = \widehat{f}(\lambda). \tag{4}$$

Искомая функция $u(y)$ находится применением обратного двумерного преобразования Фурье к функции $\widehat{u}(\lambda)$, определяемой из (4) (мы опускаем обсуждение известных трудностей, связанных с возможным обращением в нуль второго сомножителя в (4)). Если смещение объекта относительно регистрирующей системы происходит вдоль прямой линии с постоянным вектором скорости $\mathbf{V}$, то уравнения (3), (4) приобретают вид

$$\int_0^T u(x-\mathbf{V}t)\, dt = f(x), \tag{5}$$

$$\widehat{u}(\lambda_1, \lambda_2)\,\frac{1-e^{-iT(V_1\lambda_1+V_2\lambda_2)}}{i(V_1\lambda_1+V_2\lambda_2)} = \widehat{f}(\lambda_1, \lambda_2). \tag{6}$$

Из (6) несложно выразить искомую функцию u через функцию f. Для этого подставим в (6) равенство обобщенных функций:

$$u(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0} i\,(V_1\lambda_1 + V_2\lambda_2)\, e^{[illegible]} f(\lambda_1, \lambda_2),$$

из которого на основании известной связи преобразования Фурье с операциями дифференцирования и сдвига вытекает окончательное выражение для u:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} (x - kT\mathbf{V}), \tag{7}$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{V}} = V_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + V_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ — производная по вектору $\mathbf{V}$.

Рассмотренные выше примеры относятся к пространственно-инвариантным системам отображения, в которых функция рассеивания точки не зависит от положения точки объекта, т. е. каждая точка объекта подвергается одинаковому «размазыванию». В этом случае ядро $K(x, y)$ в уравнении (1) является функцией разности аргументов x и y и соответствующий интегральный оператор есть оператор свертки, что позволяет получить решение в замкнутой форме.

В случае пространственно-зависимых систем общего вида задача реставрации с аналитической точки зрения является чрезвычайно трудной. С другой стороны, численное решение интегрального уравнения (1) требует значительного вычислительного времени ввиду больших размерностей массивов данных, что делает важным выделение ситуаций, для которых задача коррекции искажений в пространственно-зависимых системах допускает аналитическое решение. Пример такого рода — движение, представимое в виде композиции не зависящего от времени геометрического преобразования (связанного, например, с наклоном или с ориентацией камеры) и пространственно-инвариантного движения [1]. Наличие указанного разложения позволяет с помощью обратного координатного преобразования свести задачу к пространственно-инвариантной. Однако многие простейшие неоднородные движения (например, параллельное смещение с одновременным вращением) подобной редукции не допускают. В настоящей работе изложен аналитический подход к задаче коррекции изображений, искаженных в результате неоднородного движения, в предположениях, менее жестких, чем в [1], и сохраняющих пространственную зависимость по существу. Их суть состоит в возможности представить одну из составляющих движения функцией типа функции Хевисайда. Такая модель отражает ситуацию, когда один из динамических параметров (например, ориентация или высота камеры над плоскостью объекта) претерпевает резкое изменение в процессе экспозиции. Эта же модель может быть рассмотрена как приближенная в случае медленного изменения второго параметра по сравнению с основным движением. Предлагаемый метод позволяет получить как спектральное, так и пространственное выражение интенсивности объекта через интенсивность искаженного изображения, достаточно простые с точки зрения вычислительной реализации.

2. Коррекция аффинных пространственно-зависимых искажений. Предположим, что параллельное смещение регистрирующей системы сочетается с изменяющимися во времени координатными преобразованиями. Траектории точек объекта в этом случае описываются формулой

$$x = A(t)y + \mathrm{s}(t), \tag{8}$$

где вектор-функция $\mathrm{s}(t)$ определяет параллельное смещение; $A(t)$ — невырожденная матрица-функция, задающая в каждый момент t на интервале экспозиции $[0, T]$ линейное преобразование в плоскости объекта (x_1, x_2).

Уравнение (2) в этом случае приобретает вид

$$\int_0^T u\left(A(t)^{-1}(x - s(t))\right) \det A(t)\, dt = f(x). \tag{9}$$

В следующих разделах будут рассмотрены конкретные частные случаи уравнения (9). Здесь же излагается общий подход к анализу уравнений такого рода при дополнительных предположениях относительно характера зависимости матрицы $A(t)$ от времени t.

Предположим, что матричная функция $A(t)$ постоянна на двух со- [illegible]

$$\int_0 u\left(A_0^{-1}(x - s(t))\right) \det A_0 dt + \int_{T_0} u\left(A_1^{-1}(x - s(t))\right) \det A_1 dt = f(x). \tag{11}$$

Применив к обеим частям равенства (11) преобразование Фурье, приходим к соотношению

$$\hat{u}\left((A_0^*)^{-1}\lambda\right) \int_0^{T_0} e^{-i\langle\lambda, s(t)\rangle} dt + \hat{u}\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) \int_{T_0}^{T} e^{-i\langle\lambda, s(t)\rangle} dt = f(x), \tag{12}$$

в котором $\hat{u}$, $\hat{f}$ — фурье-образы соответствующих функций; $\langle , \rangle$ — скалярное произведение в спектральной плоскости $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$; A^* — транспонированная матрица. Обозначив

$$a_0(\lambda) = \int_0^{T_0} e^{-i\langle\lambda, s(t)\rangle} dt, \quad a_1(\lambda) = \int_{T_0}^{T} e^{-i\langle\lambda, s(t)\rangle} dt,$$

перепишем (12) в более компактном виде:

$$a_0(\lambda)\, \hat{u}\left((A_0^*)^{-1}\lambda\right) + a_1(\lambda)\, \hat{u}\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) = \hat{f}(\lambda). \tag{13}$$

Пусть $B = \left(A_1^*\right)^{-1} A_0^*$ и для любого λ сходится бесконечное произведение

$$b(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{a_0\left(A_0^* B^k \lambda\right)}{a_1\left(A_0^* B^k \lambda\right)}. \tag{14}$$

Тогда функция $b(\lambda)$ удовлетворяет тождественному соотношению

$$a_0(\lambda)\, b\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) = a_1(\lambda)\, b\left((A_0^*)^{-1}\lambda\right). \tag{15}$$

Умножив обе части равенства (12) на функцию $b\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right)$ и учитывая соотношение (15), получим

$$a_0(\lambda)\, b\left((A_0^*)^{-1}\lambda\right) \hat{u}\left((A_0^*)^{-1}\lambda\right) + a_1(\lambda)\, b\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) \hat{u}\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) = \\ = b\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) \hat{f}(\lambda).$$

В предположении $a_1(\lambda) \neq 0$ введем функции

$$v(\lambda) = b(\lambda)\, \hat{u}(\lambda), \quad g(\lambda) = b\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) \hat{f}(\lambda)/a_1(\lambda), \tag{16}$$

которые связаны соотношением

$$v\left((A_0^*)^{-1}\lambda\right) + v\left((A_1^*)^{-1}\lambda\right) = g(\lambda). \tag{17}$$

Формальное решение функционального уравнения (17) может быть выражено в виде ряда

$$v(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k g\left(A_0^*\left((A_1^*)^{-1}A_0^*\right)^k\lambda\right). \tag{18}$$

Знание функции $v(\lambda)$ позволяет на основании (16) найти функцию $\widehat{u}(\lambda)$ и с помощью обратного преобразования Фурье определить $u(x)$. Изложенная схема с принципиальной точки зрения решает вопрос об отыскании решения уравнения (9) с условием (10) на функцию $A(t)$.

3. Коррекция искажений при вращательно-поступательном движении. Рассмотрим ситуацию, когда регистрирующая система, наряду со смещением в плоскости, параллельной плоскости объекта, изменяет на протяжении интервала экспозиции $[0, T]$ ориентацию в этой плоскости. В этом случае $A(t)$ есть матрица поворота и уравнение (8) приобретает в координатной записи следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1(t)&=y_1\cos\alpha(t)-y_2\sin\alpha(t)+s_1(t),\\ x_2(t)&=y_1\sin\alpha(t)+y_2\cos\alpha(t)+s_2(t), \end{aligned} \tag{19}$$

где $\mathbf{s}(t)=(s_1(t),\ s_2(t))$ — вектор параллельного смещения, $\alpha(t)$ — угол изменения ориентации в момент времени t. Траектории точек в плоскости (x_1, x_2) имеют вид спиралевидных кривых, вообще говоря самопересекающихся и пересекающихся между собой. Записанное отображающей системой изображение получается «размазыванием» интенсивности вдоль траектории точки.

Основное уравнение (2) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\int_0^T u\left(U_{\alpha(t)}^{-1}(x-\mathbf{s}(t))\right)dt=f(x), \tag{20}$$

где $U_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ — матрица, соответствующая оператору поворота плоскости (x_1, x_2) относительно начала координат на угол α. Преобразование Фурье, примененное к уравнению (20), с учетом ортогональности матрицы U_α приводит к соотношению

$$\int_0^T e^{-i\langle\lambda,\mathbf{s}(t)\rangle}\widehat{u}\left(U_{\alpha(t)}^{-1}\lambda\right)dt=\widehat{f}(\lambda). \tag{21}$$

Предположим, что изменение угла ориентации носит дискретный характер:

$$\alpha(t)=\begin{cases}\alpha_0, & 0\leqslant t\leqslant T_0,\\ \alpha_1, & T_0<t\leqslant T,\end{cases}\qquad 0\leqslant\alpha_1-\alpha_0<2\pi. \tag{22}$$

Тогда

$$\widehat{u}\left(U_{\alpha_0}^{-1}\lambda\right)\int_0^{T_0}e^{-i\langle\lambda,\mathbf{s}(t)\rangle}dt+\widehat{u}\left(U_{\alpha_1}^{-1}\lambda\right)\int_{T_0}^{T}e^{-i\langle\lambda,\mathbf{s}(t)\rangle}dt=\widehat{f}(\lambda). \tag{23}$$

Уравнение (23) удобно рассматривать в полярных координатах $\lambda_1=r\cos\varphi$, $\lambda_2=r\sin\varphi$:

$$a_0(r,\varphi)\widehat{u}(r,\varphi-\alpha_0)+a_1(r,\varphi)\widehat{u}(r,\varphi-\alpha_1)=\widehat{f}(r,\varphi), \tag{24}$$

где

$$a_0(r,\varphi)=\int_0^{T_0}e^{-i\langle\lambda,\mathbf{s}(t)\rangle}dt,\quad a_1(r,\varphi)=\int_{T_0}^{T}e^{-i\langle\lambda,\mathbf{s}(t)\rangle}dt.$$

Найдем, аналогично тому, как это делалось в п. 2, функцию $b(r, \varphi)$, исходя из условия

$$a_1(r, \varphi) b(r, \varphi - \alpha_0) = a_0(r, \varphi) b(r, \varphi - \alpha_1).$$

Логарифмируя, получим

$$\ln a_1(r, \varphi) - \ln a_0(r, \varphi) = \ln b(r, \varphi - \alpha_1) - \ln b(r, \varphi - \alpha_0).$$

Отсюда вытекает соотношение между коэффициентами Фурье:

$$\left(e^{-im\alpha_1} - e^{-im\alpha_0}\right) (\widehat{\ln b})_m = (\widehat{\ln a_1})_m - (\widehat{\ln a_0})_m. \tag{25}$$

Предположим, что $e^{-im\alpha_1} - e^{-im\alpha_0} \neq 0$ для номеров m, для которых правая часть (25) отлична от нуля. Тогда из (25)

$$b(r, \varphi) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\varphi}}{e^{-im\alpha_1} - e^{-im\alpha_0}} \int_0^{2\pi} [\ln a_1(r, \psi) - \ln a_0(r, \psi)] e^{-im\psi} d\psi\right\}. \tag{26}$$

Умножая обе части равенства (24) на функцию $b(r, \varphi - \alpha_0)$ и учитывая соотношение, которому удовлетворяет функция $b(r, \varphi)$, приходим к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$v(r, \varphi - \alpha_0) + v(r, \varphi - \alpha_1) = g(r, \varphi). \tag{27}$$

Здесь $v(r, \varphi) = b(r, \varphi)\widehat{u}(r, \varphi)$, $g(r, \varphi) = [b(r, \varphi - \alpha_0)\widehat{f}(r, \varphi)]/a_0(r, \varphi)$. Для определения функции $v(r, \varphi)$ разложим функции $v(r, \varphi)$ и $g(r, \varphi)$ в ряд Фурье по переменной φ на $[0, 2\pi]$:

$$v(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_m(r) e^{im\varphi}, \quad g(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{g}_m(r) e^{im\varphi}$$

— и подставим эти разложения в (27). Приравнивая амплитуды соответствующих гармоник, находим

$$\left(e^{-im\alpha_0} + e^{-im\alpha_1}\right) \widehat{v}_m(r) = \widehat{g}_m(r). \tag{28}$$

Из (28) видно, что решение уравнения (27), а следовательно, и уравнения (24) определяется единственным образом, если величина $(\alpha_1 - \alpha_0)/2\pi$ иррациональна. В противном случае возникают нетривиальные решения однородного функционального уравнения (27) с правой частью $g(r, \varphi) = 0$, совокупность которых определяет неединственность решения уравнения (24). Найдем общий вид решения однородного уравнения:

$$v(r, \varphi - \alpha_0) + v(r, \varphi - \alpha_1) = 0.$$

Согласно (28) $\widehat{v}_m(r) \neq 0$ лишь для тех номеров m, для которых $e^{-im\alpha_0} + e^{-im\alpha_1} = 0$. Условием выполнения последнего равенства является соотношение $m(\alpha_1 - \alpha_0) = (2k+1)\pi$ для некоторого целого k. Следовательно, если $(\alpha_1 - \alpha_0)/2\pi$ представимо в виде несократимой дроби p/q, то $2mp = (2k+1)q$, откуда с необходимостью вытекает, что p нечетно, q четно. Поскольку $m = ((2k+1)/2p)q$ и p и q не имеют общих делителей, то $(2k+1)/2p$ — целое, причем нечетное число. Таким образом, m представимо в виде $m = (2s+1)q$, и, значит, разложение Фурье функции $v(r, \varphi)$ имеет вид

$$v(r, \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_{(2s+1)q}(r) e^{i(2s+1)q\varphi} = e^{iq\varphi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \widehat{v}_{(2s+1)q}(r) e^{2isq\varphi}.$$

Отсюда следует, что $v(r, \varphi) = e^{iq\varphi} w(r, \varphi)$, где $w(r, \varphi)$ — произвольная функция, периодическая по аргументу φ с периодом π/q.

Допустим теперь, что $e^{-im\alpha_0} + e^{-im\alpha_1} \neq 0$ для всех m. Из (28) получаем

$$v(r,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\widehat{g}_m/\left(e^{-im\alpha_0}+e^{-im\alpha_1}\right)\right)e^{im\varphi}. \tag{29}$$

Формула (29) дает спектральное выражение для функции $v(r,\ \varphi)$. По формулам (26), (29) находим $\widehat{u}(\lambda)$ и, наконец, применением обратного преобразования Фурье определяем искомую функцию $u(x)$. Для получения явного выражения функции $\widehat{u}$ подставим в правую часть (29) равенство обобщенных функций:

$$1/\left(e^{-im\alpha_0}+e^{-im\alpha_1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{im(k\alpha_0-k\alpha_1+\alpha_0)}.$$

Изменяя порядок суммирования, получим

$$\widehat{u}(r,\varphi)=(1/b(r,\varphi))\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[b(r,\varphi+k\alpha_0-k\alpha_1+\alpha_0)f(r,\varphi+k\alpha_0-\right.$$
$$\left.-k\alpha_1+\alpha_0)\right]/a_0(r,\varphi+k\alpha_0-k\alpha_1+\alpha_0). \tag{31}$$

Следует отметить, что формула (31) определяет решение уравнения (24) вне зависимости от рациональности $(\alpha_1-\alpha_0)/2\pi$. В случае если эта величина рациональна, решение неединственно и общее решение получается добавлением к частному решению слагаемого $e^{iq\varphi}w(r,\ \varphi)$, где $w(r,\ \varphi)$ — произвольная периодическая по φ функция с периодом π/q.

4. Регуляризация решения уравнения (27). Как следует из построения решения уравнения (27), формулу (31) надлежит понимать как равенство обобщенных функций. Более того, ряд в правой части равенства (31) сходится лишь в случае $g(r,\ \varphi)=0$. Действительно, необходимым условием сходимости этого ряда является

$$\lim_{k\to\infty} g(r,\varphi+k\alpha_0-k\alpha_1+\alpha_0)=0.$$

Тогда если $\alpha_1-\alpha_0$ соизмеримо с 2π, то в силу периодичности функции g $g(r,\ \varphi)=0$. Если $\alpha_1-\alpha_0$ несоизмеримо с 2π, то элементы последовательности $g(r,\ \varphi+k\alpha_0-k\alpha_1+\alpha_0)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, сколь угодно близко приближаются к числу $g(r,\ \varphi)$, поэтому вследствие непрерывности $g(r,\ \varphi)=0$.

Для придания формуле (31) точного смысла применим регулярные методы суммирования расходящихся рядов. Рассмотрим суммирование по Чезаро:

$$(C)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k g(r,\varphi+k\alpha_0-k\alpha_1+\alpha_0)=\lim_{N\to\infty}\frac{s_1(r,\varphi)+\ldots+s_N(r,\varphi)}{N}, \tag{32}$$

где
$$s_j(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{j-1} g(r,\varphi+k\alpha_0-k\alpha_1+\alpha_0).$$

Можно показать, что предел в правой части (31) существует. В случае если $\alpha_1-\alpha_0$ соизмеримо с 2π, $\alpha_1-\alpha_0=2\pi p/q$, функция $v(r,\ \varphi)$ может быть определена без использования предельного перехода по формулам

$$v(r,\varphi)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q-1} g(r,\varphi+k(\alpha_0-\alpha_1)+\alpha_0)\quad (q\ \text{нечетно}), \tag{33}$$

$$v(r,\varphi)=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} s_k(r,\varphi)\quad (q\ \text{четно}). \tag{34}$$

системы происходит вдоль координатной оси $y_2=0$. Уравнения движения имеют вид

$$x_1(t)=y_1\cos\alpha(t)-y_2\sin\alpha(t)+Vt,$$
$$x_2(t)=y_1\sin\alpha(t)+y_2\cos\alpha(t),$$

где V — скорость поступательного движения. Если $\alpha(t)$ описывается формулой (22), то соотношение между входным и выходным изображениями выражается уравнением

$$\int\limits_0^{T_0} u\left(U_{\alpha_0}^{-1}(x-\mathbf{V}t)\right)dt+\int\limits_{T_0}^{T} u\left(U_{\alpha_1}^{-1}(x-\mathbf{V}t)\right)dt=f(x),\quad \mathbf{V}=(V,0). \tag{35}$$

Применим к обеим частям равенства (35) преобразование Фурье:

$$\hat u\left(U_{\alpha_0}^{-1}\lambda\right)\left(1-e^{-iVT_0\lambda_1}\right)/iV\alpha_1+\hat u\left(U_{\alpha_1}^{-1}\lambda\right)\left(e^{-iVT_0\lambda_1}-e^{-iVT_1\lambda_1}\right)/iV\lambda_1=\hat f(\lambda). \tag{36}$$

Для упрощения вида последующих формул положим $T_0=T/2$, $\alpha_0=0$. Тогда

$$\hat u(\lambda)+e^{-iVT_0\lambda_1}\hat u\left(U_{\alpha_1}^{-1}\lambda\right)=\hat h(\lambda), \tag{37}$$

где $\hat h(\lambda)=\left(iV\lambda_1/\left(1-e^{-iVT_0\lambda_1}\right)\right)\hat f(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $h(x)$, являющейся решением уравнения свертки:

$$\int\limits_0^{T_0} h(x-\mathbf{V}t)\,dt=f(x). \tag{38}$$

Рассмотрим функцию

$b(r,\ \varphi)=\exp\left[-i(rVT_0\sin(\varphi-\alpha_1/2)/2\sin(\alpha_1/2))\right]$, $\lambda_1=r\cos\varphi$, $\lambda_2=r\sin\varphi$.

Умножая обе части равенства (37) на $b(r,\varphi)$ и учитывая, что

$$e^{-iVT_0\lambda_1}b(r,\varphi)=b(r,\varphi-\alpha_1),$$

получим $v(r,\ \varphi)+v(r,\ \varphi-\alpha_1)=b(r,\ \varphi)\hat h(r,\ \varphi)$, $v(r,\ \varphi)=b(r,\ \varphi)\hat u(r,\ \varphi)$.

Как было показано в п. 3, решение этого уравнения представимо в виде ряда

$$v(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, b(r,\varphi-k\alpha_1)\,\hat h(r,\varphi-k\alpha_1), \tag{39}$$

сумма которого понимается в смысле Чезаро. Подставляя выражения для $v(r,\ \varphi)$, $b(r,\ \varphi)$, находим

$$\hat u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\exp\left[i\,\frac{rVT_0\sin(k\alpha_1/2)\cos(\varphi-((k+1)/2)\,\alpha_1)}{\sin(\alpha_1/2)}\right]\hat h(r,\varphi-k\alpha_1),$$

или в декартовых координатах:

$$\hat u(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\exp\left[i\,\frac{VT_0\sin(k\alpha_1/2)}{\sin(\alpha_1/2)}\left(\lambda_1\cos\frac{k+1}{2}\alpha_1+\lambda_2\sin\frac{k+1}{2}\alpha_1\right)\right]\times$$
$$\times\,\hat h\left(U_{k\alpha_1}^{-1}\lambda\right). \tag{40}$$

Применяя к обеим частям равенства (40) обратное преобразование Фурье, получаем

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h\left(U_{k\alpha_1}^{-1} x + \mathbf{n}_k\right), \tag{41}$$

где

$$\mathbf{n}_k = -[(VT_0 \sin(k\alpha_1/2))/\sin(\alpha_1/2)] \times$$
$$\times (\cos((k-1)/2)\alpha_1, \ -\sin((k-1)/2)\alpha_1).$$

Таким образом, задача восстановления изображения, искаженного в результате сдвига камеры с одновременным изменением ее ориентации, допускает следующее решение: вначале из уравнения свертки (38) находится функция $h(x)$, затем искажения, вносимые изменением ориентации, устраняются на основании формулы (41). Следует отметить, что в соответствии с изложенным в п. 4 суммирование в (41) производится в конечных пределах.

В предельном случае $\alpha_1 = 0$, формула (41) превращается в формулу (6), соответствующую равномерному прямолинейному движению. Действительно, переходя к пределу в (41) при $\alpha_1 \to 0$, получим

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h(x_1 - kVT_0, x_2).$$

Отсюда

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{h}(\lambda)/\left(1 + e^{-iVT_0\lambda_1}\right) = \hat{f}(\lambda)\, iV\lambda_1/\left(1 + e^{-iVT_0\lambda_1}\right)\left(1 - e^{-iVT_0\lambda_1}\right) =$$
$$= \hat{f}(\lambda)\, iV\lambda_1 / \left(1 - e^{-iVT\lambda_1}\right).$$

6. Коррекция искажений при движении с переменной высотой. Рассмотрим случай, когда, наряду с поступательным движением оптической системы относительно объекта, в течение времени экспозиции изменяется расстояние от системы до плоскости объекта. Искажения, вносимые изменением высоты, обусловлены растяжением координат в плоскости объекта: $(x_1, x_2) \to (r(t)x_1, r(t)x_2)$. Результирующее уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$x(t) = r(t)y + \mathrm{s}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{42}$$

Основное уравнение (2), связывающее распределения $u(x)$ и $f(x)$, запишется так:

$$\int_0^T u\left(\frac{x - \mathrm{s}(t)}{r(t)}\right) \frac{1}{r^2(t)}\, dt = f(x). \tag{43}$$

Здесь $1/(r^2(t)) = J(x, t)$ — якобиан, фигурирующий в формуле (2). Применяя к обеим частям равенства (43) преобразование Фурье, получим

$$\int_0^T \hat{u}(r(t)\lambda)\, e^{-i\langle\lambda, \mathrm{s}(t)\rangle} dt = \hat{f}(\lambda). \tag{44}$$

Будем полагать, что поступательное смещение камеры происходит вдоль прямой $y_2 = 0$ и вектор смещения имеет вид $\mathrm{s}(t) = (s_1(t), 0)$.

Рассмотрим сначала случай, когда высота камеры пропорциональна смещению камеры в плоскости, параллельной плоскости объекта:

$$r(t) = r_0 + ds_1(t).$$

Введя функции $v(\lambda) = e^{-i\lambda_1/d}\hat{u}(\lambda)$, $g(\lambda) = e^{i\lambda_1 r_0/d}\hat{f}(\lambda)$, на основании (44) получим уравнение

$$\int_0^T v(r(t)\lambda)\, dt = g(\lambda) \tag{45}$$

с новой неизвестной функцией $v(\lambda)$. Перепишем (45) в полярных координатах $\lambda_1 = \rho\cos\varphi$, $\lambda_2 = \rho\sin\varphi$:

$$\int_0^T v(r(t)\rho, \varphi)\,dt = g(\rho, \varphi). \tag{46}$$

Уравнение (46) можно решить с помощью преобразования Меллина, применение которого к обеим частям равенства (46) дает

$$Mv(\mu, \varphi)MR(\mu) = Mg(\mu, \varphi), \tag{47}$$

где

$$Mh(\mu) = \int_0^\infty \rho^{i\mu-1}h(\rho)\,d\rho, \quad R(\rho) =$$

$$= \begin{cases} (1/\rho^2)\dfrac{dr^{-1}}{d\rho}(\rho^{-1}), & \rho \in [1/r(T), 1/r_0]; \\ 0, \quad \rho \notin [1/r(T), 1/r_0]. \end{cases}$$

Из (47) определяются функции $v(\lambda)$ и $\widehat{u}(\lambda) = e^{i\lambda_1/d}v(\lambda)$. Искомое решение $u(x)$ находится применением к $\widehat{u}(\lambda)$ обратного преобразования Фурье.

Второй случай предполагает, что в процессе записи изображения происходит резкое изменение расстояния камеры до плоскости объекта. В качестве функции, моделирующей изменение высоты камеры, примем ступенчатую:

$$r(t) = \begin{cases} r_0, & 0 \leqslant t \leqslant T_0; \\ r_1, & T_0 < t \leqslant T; \end{cases} \quad r_0 < r_1.$$

В соответствии с уравнением (43) связь между исходным и искаженным изображениями выражается формулой

$$\frac{1}{r_0^2}\int_0^{T_0} u\left(\frac{x - \mathbf{V}t}{r_0}\right)dt + \frac{1}{r_1^2}\int_{T_0}^{T} u\left(\frac{x - \mathbf{V}t}{r_1}\right)dt = f(x), \tag{48}$$

где $\mathbf{V} = (V, 0)$ — вектор скорости движения камеры вдоль оси $y_2 = 0$. Применяя преобразование Фурье, из (48) получим

$$\widehat{u}(r_0\lambda)\left(1 - e^{-iVT_0\lambda_1}\right)/iV\lambda_1 + \widehat{u}(r_1\lambda)\left(\left(e^{-iVT_0\lambda_1} - e^{-iVT\lambda_1}\right)/iV\lambda_1\right) = \widehat{f}(\lambda). \tag{49}$$

Предположим, что изменение высоты происходит в момент $T_0 = T/2$. Тогда выражение (49) преобразуется к виду

$$\widehat{u}(r_0\lambda) + e^{-iVT_0\lambda_1}\widehat{u}(r_1\lambda) = \widehat{h}(\lambda), \tag{50}$$

где $\widehat{h}(\lambda) = iV\lambda_1\widehat{f}(\lambda)/(1 - e^{-iVT_0\lambda_1})$. Для того чтобы перейти к уравнению с постоянными коэффициентами, умножим обе части равенства (50) на $b(r_0\lambda)$, где $b(\lambda) = e^{-iVT_0\lambda_1/(r_1 - r_0)}$. Получим

$$w(r_0\lambda) + w(r_1\lambda) = e^{-iVT_0\lambda_1/(r_1 - r_0)}\widehat{h}(\lambda). \tag{51}$$

Здесь $w(\lambda) = e^{-iVT_0\lambda_1/(r_1 - r_0)}\widehat{u}(\lambda)$.

Решение функционального уравнения (51) выражается в виде ряда (см. п. 2)

$$w(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \exp\left[i\frac{VT_0 r_1^k\lambda_1}{(r_0 - r_1)r_0^k}\right]\widehat{h}\left(\frac{r_1^k}{r_0^{k+1}}\lambda\right). \tag{52}$$

Отсюда

$$\widehat{u}(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \exp\left[i\frac{VT_0\left(r_0^k - r_1^k\right)}{(r_1 - r_0)r_0^k}\right]\widehat{h}\left(\frac{r_1^k}{r_0^{k+1}}\lambda\right). \tag{53}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, окончательно находим

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{r_0^{2k+2}}{r_1^{2k}}h\left(\frac{r_0^{k+1}}{r_1^k}x_1-\frac{VT_0\left(r_0^k-r_1^k\right)r_0}{r_1^k(r_0-r_1)},\ \frac{r_0^{k+1}}{r_1^k}x_2\right) \qquad (54)$$

(ряд в правой части сходится в обычном смысле).

Таким образом, как и в случае вращательно-поступательного движения, восстановление искаженного изображения производится с помощью следующих операций: 1) определение функции

$$\hat{h}(\lambda)=\left(iV\lambda_1/\left(1-e^{-iVT_0\lambda_1}\right)\right)\hat{f}(\lambda)$$

путем решения уравнения свертки

$$\int_0^{T_0}h(x-\mathbf{V}t)\,dt=f(x),$$

2) компенсация искажений, вносимых за счет изменения расстояния от камеры до плоскости объекта (на основе формулы (54)).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сондхи М.** Реставрация изображения: устранение пространственно-инвариантных искажений.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 7.
2. **Савчук А.** Пространственно-зависимые искажения изображения, вызванные движением, и реставрация изображений.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 7.
3. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982, т. 2.

Поступила в редакцию 26 апреля 1983 г.

УДК 681.3.06

В. М. ЕФИМОВ, А. Л. РЕЗНИК

(Новосибирск)

АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФРАГМЕНТОВ ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫЕ К ПОВОРОТУ

Рассматриваемая ниже задача в достаточно общей форме может быть сформулирована следующим образом. Имеется два изображения одного и того же объекта. Различные условия регистрации вносят в эти изображения отличия, обусловленные не только присутствием чисто шумовых компонент, но и наличием сдвига и взаимного поворота. Кроме того, на практике дополнительными мешающими факторами являются, как правило, амплитудные и геометрические искажения изображений, которые чаще всего носят локально-однородный характер.

Для привязки двух изображений требуется по заданному на одном из них фрагменту найти его местоположение на втором. Если пренебречь геометрическими искажениями в пределах фрагмента, а шум считать «белым» гауссовым, то оптимальным методом в смысле минимума вероятности ошибки идентификации является корреляционный прием. Однако такой подход связан с большим объемом вычислений, что делает невозможным его применение в большинстве реальных задач обработки изображений.

Суть предлагаемого метода заключается в том, что каждое из изображений, рассматриваемых как функции двух переменных, заменяется его разложением по специально подобранному функциональному базису, причем это разложение должно быть инвариантно к повороту. При таком