ЛИТЕРАТУРА

1. **Kato H., Miyahara S.** Read projection screens.— Publ. 11.10.77. Cl. 350/117. USA. Pat. 4053208.
2. **Kato H., Miyahara S.** Read projection screens.— Publ. 3.01.78. Cl. 350/126. USA. Pat. 4066332.
3. **Dyson J.** Optical diffusing screens of high efficiency.— JOSA, 1960, vol. 50, N 6.
4. **Кнюпфер Г., Бонке Г.** Применение проекционного микроскопа «Е» для визуального контроля в микроэлектронике.— Йенское обозрение, 1980, № 2.

Поступила в редакцию 13 декабря 1983 г.

УДК 535.317.1

М. Е. ЖАБОТИНСКИЙ, А. А. ЛАПИДЕС

(Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ КОГЕРЕНТНО-ОПТИЧЕСКОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ТЕНЕВЫХ ГРАФИКОВ

Когерентно-оптический спектральный анализ функций методами теневого графика с использованием амплитудного [1—4] или фазового [5] носителей нечувствителен к изменениям режима химической обработки [6]. По этой причине запись сигналов в силуэтной форме применяется при обработке радиолокационных сигналов [7], анализе «свернутого» спектра [8] и изготовлении пространственных фурье-фильтров [9].

Цель настоящей работы — исследование точности когерентного спектрального анализа сигналов методом теневых графиков. Расчет проводится на примере симметричной двусторонней записи сигнала (поперечной фонограммы), результаты легко обобщаются на другие аналогичные способы теневой записи сигналов [1—5].

Когерентно-оптический метод анализа сигналов, записанных в форме поперечной фонограммы, основан на том, что распределение амплитуды поля $T(x_f, y_f)$ вдоль оси x_f дает спектр Фурье анализируемого сигнала [1—5]:

$$T(x_f, y_f) = \frac{a}{i\lambda F} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2\pi y_f (C_f(x/v) + B)/\lambda F]}{\pi y_f/\lambda F} \exp\left(-\frac{2\pi i x_f x}{\lambda F}\right) dx, \qquad (1)$$

где a — амплитуда света, λ — длина волны, F — фокусное расстояние объектива, $f(x/v)$ — анализируемый сигнал, v — скорость протяжки носителя, B — смещение, C — масштабный коэффициент. Спектр $T(x_f, y_f)$ считывается вдоль оси x_f фотоприемником с диафрагмой размерами g (ось x_f) и s (ось y_f).

На рис. 1 схематично показаны теневой график *1* синусоидального сигнала, фурье-линза *2*, фурье-плоскость *3*, диафрагма фотоприемника, предназначенная для сканирования спектра вдоль оси x_f, *4*. Спектр гармонического сигнала изображен в виде графиков, соответствующих зависимости амплитуды поля от координаты y_f.

Размер g диафрагмы однозначно связан с частотным разрешением Δf анализатора:

$$g = \lambda F/l \qquad (2)$$

(l — длина входного окна анализатора).

Ширина s определяется точностью анализа, так как распределение поля соответствует исследуемому спектру только при $y_f = 0$. Для нахождения параметра s рассмотрим сигнал фотоприемника i:

$$i \infty \int\limits_{x_f-g/2}^{x_f+g/2} \int\limits_{-s/2}^{s/2} |T|^2 \, dx_{1f} dy_f, \tag{3}$$

где x_{1f} — переменная интегрирования. Пренебрегая аддитивным членом, подставим (1) в (3) и разложим синус в ряд Тейлора, ограничиваясь квадратичными по y_f членами и изменяя порядок интегрирования:

$$i \infty \int\limits_{x_f-g/2}^{x_f+g/2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} z(x') \, z(x'') \exp\left(-\frac{2\pi i x_{1f}(x'-x'')}{\lambda F}\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-s/2}^{s/2} \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\pi y_f}{\lambda F}\right)^2 (z^2(x') + z^2(x''))\right] dy_f dx' dx'' dx_{1f}, \tag{4}$$

где x', x'' — переменные интегрирования, $z(x) = Cf(x/v) + B$.

Ошибка анализа определяется квадратичным по y_f членом.

Для оценки сверху точности анализа проинтегрируем (4) по x_f, воспользуемся тем, что $f(x/v) \leqslant B/C$, заменив $z(x)$ на $2B$, и потребуем, чтобы ошибка не превосходила $m\%$:

$$\int\limits_{-s/2}^{s/2} \frac{32}{3} (\pi B/\lambda F)^2 \, y_f^2 dy_f = m 10^{-2} s. \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$s = \sqrt{m/8} (3\lambda F/10\pi B). \tag{6}$$

Эта оценка с точностью до коэффициента, близкого к единице, совпадает с оценкой (5) из работы [1]. Однако на практике обе эти оценки иногда дают не совсем верное представление о требованиях к величине s. Это происходит, например, при анализе сигнала, содержащего гармонические составляющие с частотами f и $2f$. Если амплитуда гармоники с частотой $2f$ значительно меньше амплитуды составляющей частоты f (например, $m/2$ % от ее величины), то при точном определении амплитуды на частоте $2f$ требования к величине s становятся существенно более жесткими. Это объясняется тем, что гармоника с частотой f создает дифракционное поле на пространственной частоте $f_x = 2/\Lambda$ при $f_y \neq 0$, где Λ — пространственный период, соответствующий частоте f [5]. Интенсивность этого поля (во втором порядке дифракции света на гармонике с частотой f) много больше интенсивности света (в первом порядке дифракции света на составляющей с частотой $2f$). Поэтому при считывании фурье-спектра при $f_x = 2/\Lambda$ с помощью диафрагмы шириной s на фотоприемник попадает не только свет сигна-

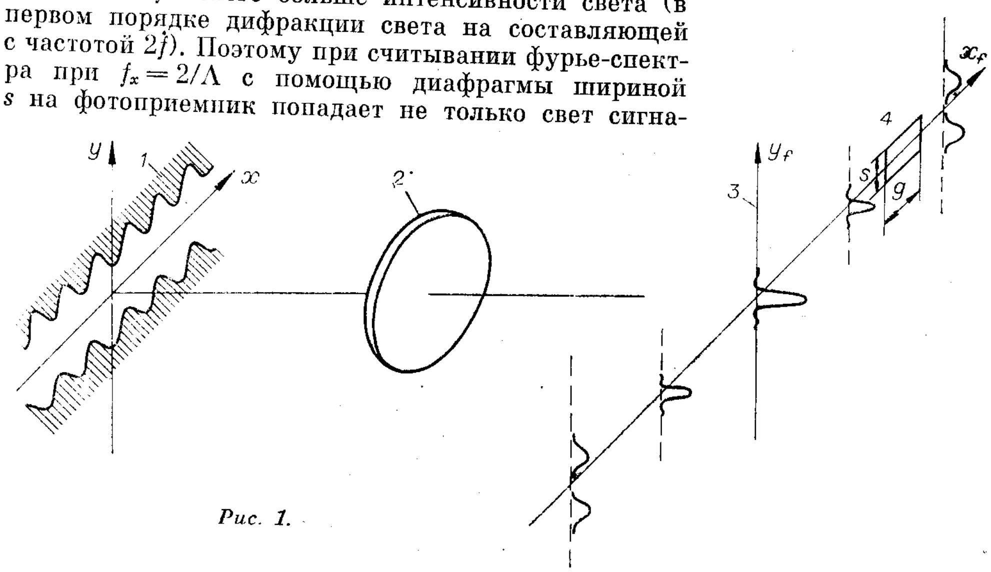

Рис. 1.

ла с частотой $2f$, но и часть света второго дифракционного максимума, обусловленного сигналом с частотой f. При точном измерении амплитуды спектра на частоте $2f$ этот свет приводит к большой ошибке (при малых m).

Это кажущееся противоречие легко объяснимо. Оценка (6) получена в предположении, что ошибка не превосходит m %, причем ошибка понимается в интегральном смысле. Поэтому использование диафрагмы шириной, получаемой из (6), на пространственной частоте, соответствующей $2f$, приведет к интегральной ошибке, меньшей m %, хотя точность оценки амплитуды на частоте $2f$ будет незначительна.

Таким образом, оценка (6) не связывает ширину диафрагмы с допустимой ошибкой определения амплитуды сигнала на какой-либо определенной частоте. Отметим, что при выводе (5) необходимо интегрировать (4) по x_f, так как в противном случае замена $z(x)$ на $2B$ для оценки величины ошибки математически неправомочна.

Покажем, что для более точной оценки ширины s нужно иметь априорную информацию об анализируемом сигнале.

Разобьем (4) на два интеграла:

$$i \backsim \int\limits_{x_f-g/2}^{x_f+g/2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} z(x')\, z(x'') \exp\left(-\frac{2\pi i x_{1f}(x'-x'')}{\lambda F}\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-s/2}^{s/2} dy_f dx' dx'' dx_{1f} + \int\limits_{x_f-g/2}^{x_f+g/2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [z^3(x')\, z(x'') +$$

$$+ z^3(x'')\, z(x')] \exp\left(-\frac{2\pi i x_{1f}(x'-x'')}{\lambda F}\right) \int\limits_{-s/2}^{s/2} \frac{4}{3}\left(\frac{\pi y_f}{\lambda F}\right)^2 dy_f. \qquad (7)$$

Первый интеграл в (7) позволяет получить неискаженную анализируемую мощность спектра, второй — выражение для оценки ошибки анализа. Внутренний (по y_f) интеграл в первом слагаемом (7) равен s, а во втором — $[-(\pi/3\lambda F)^2 s^3]$. Обозначив через $\mathfrak{F}(z)$ преобразование Фурье функции z, получим, что первый интеграл в (7) есть $\int\limits_{x_f-g/2}^{x_f+g/2} |\mathfrak{F}(z)|^2 s dx_{1f}$, а второй —

$$-\int\limits_{x_f-g/2}^{x_f+g/2} \left(\frac{\pi}{3\lambda F}\right)^2 s^3 [\mathfrak{F}(z^3)\, \mathfrak{F}^*(z) + \mathfrak{F}(z)\, \mathfrak{F}^*(z^3)]\, dx_{1f}.$$

Если потребовать, чтобы ошибка не превосходила m %, то вместо (6) будем иметь

$$s = \sqrt{m}(3\lambda F/10\pi)[|\mathfrak{F}(z)|^2/2\mathrm{Re}\,[\mathfrak{F}(z^3)\mathfrak{F}^*(z)]]^{1/2}. \qquad (8)$$

Рассмотрим несколько примеров.

При $z(x) = 2B$ формулы (8) и (6) совпадают.

При анализе гармонического сигнала $f(x/v)$ с пространственным периодом Λ и амплитудой A формула (8) дает для s значения $\sqrt{m}(3\lambda F/10\pi B)\sqrt{2/3(4+A^2/B^2)}$ при $f_x = 1/\Lambda$ и нуль при $f_x = k/\Lambda$, где k — целое число, большее единицы. На остальных частотах s может принимать любые значения. Так как $0 < A^2/B^2 \leqslant 1$, при $f_x = 1/\Lambda$ $\sqrt{2m/15} \times (3\lambda F/10\pi B) < s < \sqrt{m/6}(3\lambda F/10\pi B)$, что близко к оценке (6).

Пусть функция $z(x)$ задается рядом

$$z(x) = B + \sum_{i=1}^{N} A_i \cos 2\pi f_{x_i} x, \qquad (9)$$

A_i — амплитуды, f_{x_i} — пространственные частоты.

Рассмотрим (8) при x_f, соответствующем какой-то частоте f_{x_i}. Выражая косинус через сумму экспонент, получим

$$s = \sqrt{m}\,\frac{3\lambda F}{10\pi}\left[\frac{A_i/2}{2\left(\frac{3B^2A_i}{2}+\frac{3A_i^3}{8}+\frac{3B}{4}\sum\limits_{j,l}A_jA_l+\frac{3}{8}\sum\limits_{k,n,p}A_kA_nA_p\right)}\right]^{1/2}, \tag{10}$$

где суммирование проводится по индексам j, l и k, n, p, таким, что

$$\begin{cases} |f_{x_j} \pm f_{x_l}| = f_{x_i}, \\ |f_{x_k} \pm f_{x_n} \pm f_{x_p}| = f_{x_i}. \end{cases} \tag{11}$$

В том случае, когда суммы обращаются в нуль (т. е. на частоте f_{x_i} не возникают нелинейные искажения), выражение (10) совпадает с оценкой для ширины s при анализе гармонического сигнала.

Оценим сверху суммы в знаменателе (10), воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского. Заменяя первую сумму выражением $\sum\limits_j A_j^2 \sum\limits_l A_l^2$, которое вследствие условия $\sum\limits_{j,l}(A_j + A_l) < B - A_i$ принимает максимальное значение при $A_j = A_l$, получаем

$$\sum_{j,l} A_jA_l \leqslant (B - A_i)^2/4. \tag{12}$$

Аналогично для второй суммы в (10)

$$\sum_{k,n,p} A_kA_nA_p \leqslant (B - A_i)^3/27. \tag{13}$$

Объединяя (10), (12) и (13), имеем

$$s = \sqrt{m}\,\frac{3\lambda F}{10\pi B}\left[\frac{2}{3\left(4+\frac{A_i^2}{B^2}+\frac{(B-A_i)^2}{2BA_i}+\frac{(B-A_i)^3}{27B^2A_i}\right)}\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Формула (14) показывает, что при анализе частотных составляющих с большими амплитудами $A_i \simeq B$ оценки (6) и (14) почти одинаковы (так как практически весь сигнал сосредоточен на частоте f_{x_i}, интегральная и локальная оценки совпадают). Наоборот, при малых A_i оценка (6) несправедлива, поэтому для точного нахождения амплитуды сигнала на частоте f_{x_i} необходимо выбирать s существенно меньше величины, вычисляемой из (6). Именно при малом A_i в знаменателе (14) можно пренебречь вторым и четвертым слагаемыми по сравнению с третьим и числитель третьего слагаемого заменить на B^2:

$$s = \sqrt{m}(3\lambda F/10\pi B)[2/3(4 + B/2A_i)]^{1/2}. \tag{15}$$

Итак, для точного определения спектра сигнала с точностью m % на любой частоте необходимо выбирать s по формуле (15), в которой под A_i подразумевается минимальное значение из всех амплитуд A_i. Это, однако, может приводить к большим потерям света, падающего на фотоприемник. Поэтому целесообразно точный спектральный анализ выполнять в два этапа. На первом этапе следует выбрать s в соответствии с (6), что обеспечивает интегральную точность m %. На втором этапе необходимо по формуле (14) или (15) найти значение s для тех частот спектра, амплитуда которых невелика, и провести уточненный анализ спектра на этих частотах: локальная точность анализа при этом m %.

Полученные соотношения не учитывают, однако, размытия фурье-спектра за счет влияния аберрационного пятна объектива. С помощью рис. 1 легко понять физическую причину уменьшения точности анализа из-за влияния аберраций. Аберрации приводят к тому, что вследствие размытия спектра вдоль оси y_f интенсивность света при $y_f = 0$ в первом

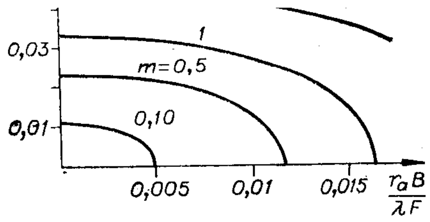

Рис. 2.

этому при считывании размытого спектра даже с помощью бесконечно узкой диафрагмы ($s=0$) отклик фотоприемника не будет точно соответствовать спектру анализируемого сигнала.

Определим допустимую ширину s_1 в этом случае, полагая для оценки, что спектр размывается вдоль оси y_f пятном

$$h=(1/2r_a)\operatorname{rect}(y/2r_a). \tag{16}$$

Распределение поля $T(x_f,\ y_f)$ в плоскости Фурье является результатом свертки выражений (1) и (16):

$$T\ (x_f,\ y_f)=\frac{a}{i\lambda F}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi i x_f x}{\lambda F}\right)\int\limits_{-r_a}^{r_a}\frac{1}{2r_a}\,\frac{\sin\left[2\pi\left(y_f-y_f'\right)z/\lambda F\right]}{\pi\left(y_f-y_f'\right)/\lambda F}\,dy_f'dx, \tag{17}$$

где y_f' — переменная интегрирования. Подставляя (17) в (3), разлагая синус в ряд Тейлора, ограничиваясь квадратичными по y_f и r_a членами, имеем

$$i\infty\int\limits_{x_f-g/2}^{x_f+g/2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}z\,(x')\,z\,(x'')\exp\left(-\frac{2\pi i x_{1f}\,(x'-x'')}{\lambda F}\right)\int\limits_{-s_1/2}^{s_1/2}\int\limits_{-r_a}^{r_a}\Bigg[1-$$
$$-\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{\lambda F}\right)^2 z^2\,(x')\left(y_f-y_f'\right)^2\Bigg]\,dy_f'\int\limits_{-r_a}^{r_a}\Bigg[1-\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{\lambda F}\right)^2\times$$
$$\times z^2\,(x'')\left(y_f-y_f''\right)^2\Bigg]\,dy_f''dy_f dx'dx''dx_{1f}, \tag{18}$$

y_f'' — переменная интегрирования. Интегрируя по y_f' и y_f'', проанализируем внутренний (по y_f) интеграл, сохраняя только квадратичные по y_f и r_a члены. Для оценки сверху заменим $z(x)$ на $2B$ и потребуем, чтобы интегральная ошибка составляла не более m %. Аналогично (5)

$$\int\limits_{-s_1/2}^{s_1/2}\frac{32}{3}\left(\frac{\pi B}{\lambda F}\right)^2\left(y_f^2+\frac{r_a^2}{3}\right)dy_f=m10^{-2}\int\limits_{-s_1/2}^{s_1/2}dy_f, \tag{19}$$

что дает для

$$s_1=\sqrt{m/8}\,(3\lambda F/10\pi B)\,\sqrt{1-32\cdot 10^2\pi^2B^2r_a^2/9m\lambda^2F^2}. \tag{20}$$

Соотношение (20) при $r_a=0$ совпадает с (6). На рис. 2 представлены построенные по формуле (20) зависимости относительной ширины $s_1B/\lambda F$ от относительного радиуса пятна $r_aB/\lambda F$ при разных значениях m. Уменьшение m (увеличение точности анализа) и F (уменьшение масштаба спектра) приводит к уменьшению s_1.

Таким образом, получены соотношения для определения допустимой ширины диафрагмы на входе фотоприемника когерентно-оптического спектроанализатора сигналов, представленных в силуэтной форме. Показано, что в случае, когда спектр содержит слабые частотные составляющие, требования к диафрагме при анализе с высокой локальной точностью значительно выше требований при анализе с той же интегральной точностью. Определены требования к ширине диафрагмы при учете аберрационного пятна объектива для заданной интегральной точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гибин И. С. и др.** Анализ спектров одномерных сигналов оптическими методами.— Автометрия, 1971, № 1.
2. **Дяченко А. А., Персиков М. В., Шушпанов О. Е.** Применение теневых графиков для спектрального анализа функций методами когерентной оптики.— Опт. и спектр., 1971, т. XXXI, вып. 3.
3. **Felstead E. B.** Optical Fourier transformation of area-modulated spatial functions.— Appl. Opt., 1971, vol. 10, N 11.
4. **Чугуй Ю. В.** Анализ спектров сигналов с многодорожечной силуэтной записью.— Автометрия, 1974, № 6.
5. **Zhabotinsky M. E., Lapides A. A., Schpuntov A. I.** Optical spectral analysis of signals recorded on a pure phase medium.— Opt. Lett., 1983, vol. 8, N 1.
6. **Бургов В. А.** Основы записи и воспроизведения звука.— М.: Искусство, 1959.
7. **Белов Ю. И. и др.** Об одном способе записи голограмм неоптических полей.— Изв. высш. учебн. заведений. Сер. Радиофизика, 1978, т. XXI, № 2.
8. **Тай А., Юу Ф.** Широкополосный спектральный анализ сигналов с использованием силуэтной записи (модуляции).— Автометрия, 1981, № 1.
9. **Чугуй Ю. В.** Оптическая обработка сигналов с помощью силуэтных фильтров.— Автометрия, 1972, № 5.

Поступила в редакцию 28 марта 1983 г.;
окончательный вариант — 22 августа 1983 г.