АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1984

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.317 : 519.21

М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА — ХОПФА В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Пусть имеется фильтр. Вход фильтра через включатель подсоединен к источнику стационарного процесса, представляющего собой полезный сигнал $m(t)$ с наложенной на него помехой $n(t)$. В некоторый момент времени вход фильтра с помощью включателя подсоединяется к источнику сигнала $\varphi(t)=m(t)+n(t)$. Необходимо определить структуру и параметры фильтра, исходя из минимума текущей величины дисперсии ошибки [1]. Сама ошибка (см. рисунок) записывается так:

$$\varepsilon(t)=m(t)-\int_0^t k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Как показано в [2], интегральное уравнение, которому удовлетворяет искомая импульсная функция оптимальной системы, будет иметь вид

$$\int_0^t k(t,\tau)\,R_1(\tau,\sigma)\,d\tau-R_2(t,\sigma)=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant\sigma\leqslant t. \tag{2}$$

Для рассматриваемого частного случая стационарного процесса соотношение (2) перепишется следующим образом:

$$\int_0^t k(t,\tau)\,R_1(\tau-\sigma)\,d\tau=R_2(t-\sigma), \quad 0\leqslant\sigma\leqslant t. \tag{3}$$

Здесь $k(t,\tau)$ — импульсная переходная функция; $R_1(\theta)$ и $R_2(\theta)$ — взаимные корреляционные функции:

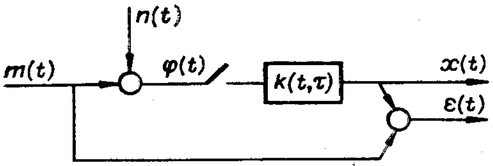
$$R_1(\theta)=\begin{cases}R_{11}(\theta) & \text{при} \quad \theta\geqslant 0;\\ R_{12}(\theta) & \text{при} \quad \theta<0;\end{cases} \qquad R_2(\theta)=\begin{cases}R_{21}(\theta) & \text{при} \quad \theta\geqslant 0;\\ R_{22}(\theta) & \text{при} \quad \theta<0.\end{cases} \tag{4}$$

В частном случае, когда

$$R_n(\theta)=\begin{cases}\sum\limits_{l=1}^{p_n} b_{nl}e^{\beta_{nl}\theta}+\sum\limits_{i=0}^{u_n} c_{ni}\delta^{(i)}(\theta), \quad \theta\geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\beta_{nl}<0\\ \sum\limits_{j=1}^{k_n} a_{nj}e^{\alpha_{nj}\theta}, \quad \theta<0, \quad \operatorname{Re}\alpha_{nj}>0\end{cases} \quad (n=1,\,2), \tag{5}$$

взаимная спектральная плотность будет иметь вид

$$S_n(s)=\int_{-\infty}^{\infty} R_n(\theta)\,e^{s\theta}d\theta=\sum_{j=1}^{k_n}\frac{a_{nj}}{\alpha_{nj}-s}-\sum_{l=1}^{p_n}\frac{b_{nl}}{\beta_{nl}-s}+\sum_{i=0}^{u_n}(-1)^i c_{ni}s^i \quad (n=1,\,2). \tag{6}$$



Введем в рассмотрение нормальную параметрическую передаточную функцию [1]

$$K(s,\ t)=\int_0^t k(t,\ \tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau. \tag{7}$$

Левую и правую части (3) умножим на $e^{s(\sigma-t)}$ и проинтегрируем по σ на интервале существования равенства (3):

$$\int_0^t\int_0^t k(t,\tau)\,R_1(\tau-\sigma)\,d\tau e^{s(\sigma-t)}d\sigma=\int_0^t R_2(t-\sigma)\,e^{s(\sigma-t)}d\sigma. \tag{8}$$

Преобразуем выражение, стоящее в левой части:

$$\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\int_0^t R_1(\tau-\sigma)\,e^{-s(\tau-\sigma)}d\sigma. \tag{9}$$

Введем новую переменную интегрирования $\theta=\tau-\sigma$. В результате (9) перепишется так:

$$-\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\int_{\tau}^{\tau-t}R_1(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta=\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\int_{\tau-t}^{\tau}R_1(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta=$$

$$=\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\left\{\int_{\tau-t}^{0}R_1(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta+\int_0^{\tau}R_1(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta\right\}. \tag{10}$$

С учетом (4) выражение (10) переходит в

$$\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\left\{\int_{\tau-t}^{0}R_{12}(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta+\int_0^{\tau}R_{11}(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta\right\}. \tag{11}$$

Запишем (11) для частного случая (5):

$$\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\left\{\sum_{j=1}^{k}a_{1j}\int_{\tau-t}^{0}e^{(\alpha_{1j}-s)\theta}d\theta+\sum_{l=1}^{p_1}b_{1l}\int_0^{\tau}e^{(\beta_{1l}-s)\theta}d\theta+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{u_1}c_{1i}\int_0^{\tau}\delta^{(i)}(\theta)\,e^{-s\theta}d\theta\right\}=\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{1j}}{\alpha_{1j}-s}\,e^{(\alpha_{1j}-s)\theta}\Big|_{\tau-t}^{0}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{p_1}\frac{b_{1l}}{\beta_{1l}-s}\,e^{(\beta_{1l}-s)\theta}\Big|_0^{\tau}+\sum_{i=0}^{u_1}(-1)^i c_{1i}s^i\right\}=\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{1j}}{\alpha_{1j}-s}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-e^{(\alpha_{1j}-s)(\tau-t)}\right)+\sum_{l=1}^{p_1}\frac{b_{1l}}{\beta_{1l}-s}\left(e^{(\beta_{1l}-s)\tau}-1\right)+\sum_{i=0}^{u_1}(-1)^i c_{1i}s^i\right\}=$$

$$=\int_0^t k(t,\tau)\,e^{s(\tau-t)}d\tau\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{1j}}{\alpha_{1j}-s}-\sum_{l=1}^{p_1}\frac{b_{1l}}{\beta_{1l}-s}+\sum_{i=0}^{u_1}(-1)^i c_{1i}s^i\right\}-$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{1j}}{\alpha_{1j}-s}\int_0^t k(t,\tau)\,e^{\alpha_{1j}(\tau-t)}d\tau+\sum_{l=1}^{p_1}\frac{b_{1l}}{\beta_{1l}-s}\,e^{(\beta_{1l}-s)t}\int_0^t k(t,\tau)\,e^{\beta_{1l}(\tau-t)}d\tau. \tag{12}$$

Если воспользоваться соотношениями (6) и (7), то (12) можно переписать так:

$$K(s,\ t)\,S_1(s)-\sum_{j=1}^{k_1}\frac{a_{1j}}{\alpha_{1j}-s}\,K(\alpha_{1j},\ t)+\sum_{l=1}^{p_1}\frac{b_{1l}}{\beta_{1l}-s}\,e^{(\beta_{1l}-s)t}K(\beta_{1l},\ t). \tag{13}$$

Перейдем к выражению, стоящему в правой части равенства (8):

$$\int\limits_0^t R_2(t-\sigma)\, e^{s(\sigma-t)}d\sigma = \int\limits_0^t R_2(\theta)\, e^{-s\theta}d\theta = \int\limits_0^t R_{21}(\theta)\, e^{-s\theta}d\theta = \sum_{l=1}^{p_2} b_{2l}\int\limits_0^t e^{(\beta_{2l}-s)\theta}d\theta +$$

$$+\sum_{i=0}^{u_2} c_{2i}\int\limits_0^t \delta^{(i)}(\theta)\, e^{-s\theta}d\theta = \sum_{l=1}^{p_2}\frac{b_{2l}}{\beta_{2l}-s}\, e^{(\beta_{2l}-s)\theta}\Big|_0^t + \sum_{i=0}^{u_2}(-1)^i c_{2i}s^i =$$

$$=\sum_{l=1}^{p_2}\frac{b_{2l}}{\beta_{2l}-s}\left(e^{(\beta_{2l}-s)t}-1\right)+\sum_{i=0}^{u_2}(-1)^i c_{2i}s^i. \qquad (14)$$

Теперь с учетом (13) и (14) уравнение (8) будет иметь следующий вид:

$$K(s,\ t)\, S_1(s)-\sum_{j=1}^{k_1}\frac{a_{1j}}{\alpha_{1j}-s}K(\alpha_{1j},\ t)+\sum_{l=1}^{p_1}\frac{b_{1l}}{\beta_{1l}-s}e^{(\beta_{1l}-s)t}K(\beta_{1l},\ t)-$$

$$-\sum_{l=1}^{p_2}\frac{b_{2l}}{\beta_{2l}-s}\left(e^{(\beta_{2l}-s)t}-1\right)+\sum_{i=0}^{u_2}(-1)^i c_{2i}s^i = 0. \qquad (15)$$

При $t\to\infty$ уравнение (15) вырождается в полученное в [3] уравнение для стационарного режима.

Уравнение (15) можно решить относительно передаточной функции $K(s,\ t)$. В нее будут линейно входить неизвестные функции $K(\alpha_{1j},\ t)$, $K(\beta_{1l},\ t)$. Значения величин этих констант отыскиваются из условия

$$k(t,\ \tau)=0 \quad \text{при} \quad t<\tau. \qquad (16)$$

При этом получается система алгебраических уравнений. Если количества уравнений для определения всех неизвестных недостаточно, остальные ищутся из минимума дисперсии ошибки или способом, приведенным в [4].

Пример. Проследим пример расчета фильтра с теми же исходными данными, что и в [4], но режим рассмотрим не установившийся, а переходный.

Полезный сигнал $m(t)$ имеет спектральную плотность $S_{mm}(s)=3/(1-s^2)$, помеха представляет собой белый шум с единичной интенсивностью $S_{nn}(s)=1$. Требуется из минимума ошибки в переходном режиме найти передаточную функцию оптимального фильтра.

Применительно к рассматриваемому случаю

$$S_1(s)=S_{\varphi\varphi}(s)=S_{mm}(s)+S_{nn}(s)=(4-s^2)/(1-s^2)=1+(3/2)\times$$
$$\times(1/(1+s))+(3/2)(1/(1-s)),$$
$$S_2(s)=S_{mm}(s)=(3/2)(1/(1+s))+(3/2)(1/(1-s)). \qquad (17)$$

Уравнение (15), из которого определяется $K(s,\ t)$, будет иметь вид

$$K(s,\ t)\,\frac{4-s^2}{1-s^2}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{(1-s)}\,K(1,\ t)+\frac{3}{2}\,\frac{1}{-1-s}\,e^{-(1+s)t}K(-1,\ t)-$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{1}{-1-s}\left(e^{-(1+s)t}-1\right)=0 \qquad (18)$$

или

$$K(s,\ t)=\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2-s}-\frac{1}{2+s}\right]K(1,\ t)+\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2+s}-\frac{1}{2-s}\right]e^{-1t}e^{-st}K(-1,\ t)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2+s}-\frac{1}{2-s}\right]\left(e^{-1t}e^{-st}-1\right)\right\}. \qquad (19)$$

С использованием соотношения

$$k(t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty}K(s,\ t)\, e^{-s(\tau-t)}ds \qquad (20)$$

из (18) найдем

$$k(t,\ \tau)=\frac{3}{8}\Big\{\big(\underset{\tau>t}{3e^{+2t}}K(1,\ t)-e^{-1t}K(-1,\ t)+e^{-1t}\underset{\tau>t}{-e^{+2t}}\big)\,e^{-2\tau}+\big(\underset{\tau>t}{e^{-2t}}K(1,\ t)-$$

$$-3e^{-1t}K(-1,\ t)+3e^{-1t}\underset{\tau>t}{-3e^{-2t}}\big)\,e^{+2\tau}\Big\}. \qquad (21)$$

Первое, четвертое, пятое и восьмое слагаемые в (21) при $\tau < t$ тождественно равны нулю. Из (21) с учетом (16) имеем

$$3e^{+2t}K(1, t) - e^{-1t}K(-1, t) = e^{+2t} - e^{-1t},$$
$$e^{-2t}K(1, t) - 3e^{-1t}K(-1, t) = 3e^{-2t} - 3e^{-1t}, \tag{22}$$

из (22) —

$$K(1, t) = (-3e^{1t} + 3e^{-3t})/(-9e^{+t} + e^{-3t}); \; K(-1, t) =$$
$$= (8 - 9e^{t} + e^{-3t})/(-9e^{+t} + e^{-3t}). \tag{23}$$

При $t \to \infty$ $K(1, t) = 1/3$, $K(-1, t) = 1$, что совпадает со значениями этих параметров в установившемся режиме $K(s) = 1/(2+s)$. При $t = 0$ $K(1, t) = 0$, $K(-1, t) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солодов А. В., Петров Ф. С.** Линейные автоматические системы с переменными параметрами.— М.: Наука, 1971.
2. **Росин М. Ф., Булыгин В. С.** Статистическая динамика и теория эффективности систем управления.— М.: Машиностроение, 1981.
3. **Зотов М. Г.** Решение интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини операционным методом.— Автометрия, 1972, № 1.
4. **Зотов М. Г.** Об одном способе определения неизвестных параметров при решении интегральных уравнений операционным методом.— Автометрия, 1975, № 4.

Поступило в редакцию 4 ноября 1982 г.

УДК 621.396.1

Е. Л. КУЛЕШОВ

(Владивосток)

ОЦЕНИВАНИЕ ИНТЕРВАЛА КОРРЕЛЯЦИИ

Интервал корреляции (ИК) — одна из важнейших числовых характеристик стационарного случайного процесса. Известны различные определения ИК [1, 2]. В прикладных исследованиях оценивание ИК может иметь и самостоятельный интерес, но чаще оценка интервала корреляции применяется в последующем корреляционно-спектральном анализе, поскольку знание ИК позволяет достаточно точно выбрать ширину сглаживающего окна [3] и получить оценку ковариационной функции или спектральной плотности случайного процесса, близкую к оценке с минимальной среднеквадратической ошибкой. Исследование свойств оценок ИК является достаточно сложным вопросом, не нашедшим пока должного освещения в литературе.

Наиболее распространено определение ИК τ_0 в интегральной форме: $\tau_0 = \int_0^\infty |B(\tau)|\,d\tau$, $B(\tau)$ — ковариационная функция стационарного случайного процесса $x(t)$ с единичной дисперсией. Если $[t_0, t_0 + T]$ — интервал наблюдения процесса $x(t)$ и $\beta_0(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)\,x(t+|\tau|)\,dt/T$, $|\tau| \leqslant T$ — несглаженная оценка ковариационной функции, то соответствующая оценка ИК $T_0 = \int_0^T |\beta_0(\tau)|\,d\tau$. Среднеквадратическая ошибка такой оценки не уменьшается при $T \to \infty$. Это легко показать для неотрицательной ковариационной функции. При этом имеет смысл представить оценку ИК в виде

$$T_0 = \int_0^T \beta_0(\tau)\,d\tau = 0{,}5 f_0(0),$$

где $f_0(\omega)$ — несглаженная спектральная оценка (преобразование Фурье от функции β_0). Пусть M — операция математического ожидания, $F(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса $x(t)$, тогда [3] $\lim\limits_{T\to\infty} Mf_0(0) = F(0)$ и $\lim\limits_{T\to\infty} \operatorname{var} f_0(0) = 2F^2(0)$. Таким образом, среднеквадратическая ошибка оценки T_0 при $T \to \infty$ не уменьшается.