

А. П. Шамову за помощь при создании ОЭС. Авторы также благодарны А. З. Дуну, С. Ю. Меркину и Г. П. Щербакову за предоставление образца фотоэлектрооптического модулятора света «Кристалл» и консультации по его эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевский В. А. Методы оптимальных решений в распознавании изображений.— М.: Наука, 1976.
2. Василенко Г. И. Голографическое опознавание образов.— М.: Сов. радио, 1977.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982, т. 2.
4. Lohmann A. W. Matched filtering with self-luminous objects.— Appl. Opt., 1968, vol. 7, p. 561.
5. Potaturkin O. I. Incoherent diffraction correlator with a holographic filter.— Appl. Opt., 1979, vol. 18, p. 4203.
6. Карпова О. М., Нежевенко Е. С., Уманцев Г. Д. Распознавание изображений известной формы на фотоснимках.— Автометрия, 1975, № 3.
7. Козлов О. А., Нежевенко Е. С., Потатуркин О. И. Распознавание изображений в когерентно-оптических системах с применением контурных эталонов.— Автометрия, 1976, № 6.
8. Давыдов В. Т., Потатуркин О. И. Сравнительный анализ алгоритмов распознавания изображений.— Автометрия, 1979, № 4.
9. Дун А. З. и др. Исследование фотоэлектрооптического модулятора света в режиме обработки изображений.— Автометрия, 1982, № 2.
10. Нежевенко Е. С. Новый подход к оптической аналоговой вычислительной технике.— В кн.: Оптическая обработка информации. Л.: ЛИЯФ, 1979.
11. Котляр П. Е., Нежевенко Е. С., Опарин А. Н., Фельдбуш В. И. Дифференциальные управляемые транспаранты для обработки оптической информации.— Там же.
12. Петров М. П., Хоменко А. В., Марахонов В. И., Шлягин М. Г. Нестационарные явления в пространственно-временном модуляторе света.— Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, вып. 7.
13. Фельдбуш В. И. Управляемый транспарант для оконтуривания изображений.— Автометрия, 1980, № 6.
14. Дун А. З. и др. Фотоэлектрооптический преобразователь на основе охлаждаемого кристалла KD_2PO_4 и селенового фотослоя.— Электрон. техника. Сер. 4. Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1978, вып. 7.
15. Фризер Х. Фотографическая регистрация информации.— М.: Мир, 1978.
16. Chavel P., Lowenthal S. A method of incoherent optical-image processing using synthetic holograms.— JOSA, 1976, vol. 66, p. 14.
17. Potaturkin O. I., Nezhevenko E. S., Khotzkin V. I. Coherent intensity correlator.— J. Opt., 1980, vol. 11, p. 305.
18. Потатуркин О. И. Дифракционные корреляторы интенсивности.— В кн.: Применение методов оптической обработки информации и голографии. Л.: ЛИЯФ, 1980.
19. Potaturkin O. I., Khotzkin V. I. Diffraction correlators invariant to the shift of optical elements.— Opt. Comm., 1980, vol. 34, p. 159.

*Поступила в редакцию 3 июля 1983 г.;
окончательный вариант — 20 сентября 1983 г.*

УДК 681.7 : 535.316

Т. М. БАНДМАН
(Новосибирск)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОКУСНОГО РАССТОЯНИЯ И АБЕРРАЦИЙ ЛИНЗЫ ПО ИЗВЕСТНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ ТЕСТОВЫХ СИГНАЛОВ

В статье решается следующая обратная задача. Известно изображение тестовых сигналов, формируемое тонкой неидеальной линзой, и расстояние от плоскости источников до плоскости изображений. По этим данным восстанавливаются характеристики линзы (ее фокусное расстояние и aberrации) и расстояние от нее до плоскости изображения. Под aberrациями подразумеваются фазовые неоднородности, которые могут

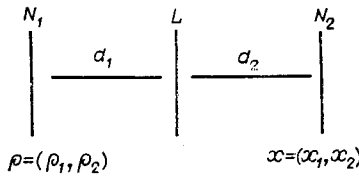


Рис. 1.

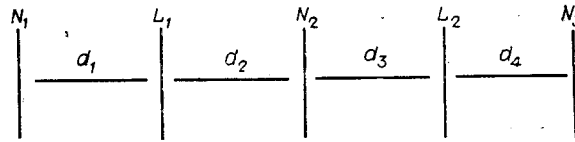


Рис. 2.

возникнуть как дефекты изготовления линзы или крепления, в результате температурных изменений и т. д.

Такая же задача рассматривается для двух тонких неидеальных линз, расположенных на одной оптической оси. Она сложнее, так как в этом случае требуется найти две неизвестные функции (абберации), два неизвестных расстояния и установить положение двух фокусов. Показано, как вычисляются эти характеристики по известным распределениям комплексной амплитуды в плоскости изображения при прохождении через систему определенного набора тестовых сигналов.

Для однолинзовой системы введем обозначения (рис. 1): N_1 и N_2 — плоскости источников и изображения соответственно; L — плоскость линзы; d_1 , d_2 — расстояния между плоскостями N_1 и L , L и N_2 . Точки в плоскостях N_1 и N_2 будем обозначать как двумерные векторы, например $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, причем $|\rho| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$, $\rho^2 = |\rho|^2$.

Через u_1 , u_2 , v_1 , v_2 обозначим комплексные амплитуды в плоскостях N_1 , N_2 непосредственно перед линзой и за ней.

Задача решается в следующих предположениях (*).

1. Расстояния $d_1, d_2 \gg (\pi/4\lambda)(D_1^2 + D_2^2)$ (λ — длина волны, а D_1 и D_2 — диаметры исследуемых областей в плоскостях N_1 и N_2 соответственно), т. е. при описании распространения света можно пользоваться приближением Френеля.

2. Прохождение монохроматического света через линзу эквивалентно умножению комплексной амплитуды v_1 на гладкую функцию

$$P(z) = \chi(z) \exp\{-ik/2f z^2 + i\Psi(z)\},$$

где $z = (z_1, z_2)$ — координаты в плоскости L ; k — волновое число; f — фокусное расстояние линзы; $\Psi(z)$ — вещественная функция, характеризующая абберации; $\chi(z)$ — характеристическая функция апертуры (равна 1 внутри отверстия и 0 вне его). Предполагается, что абберации малы, т. е.

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \Psi(z) (z^2)^{-1} = 0. \quad (1)$$

Функцию $P(z)$ будем называть характеристикой линзы.

В дальнейшем для любых функций φ и Ψ через $J_z[\varphi](y)$ или $\hat{\varphi}(y)$ будет обозначаться значение в точке y преобразования Фурье функции φ по переменной z , а через $\psi \otimes \varphi$ — значение свертки функций ψ и φ в точке y . Положим $g(z) = P(z) \exp\{ikz^2(1/d_1 + 1/d_2)\}$ и рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} T_{d_1, d_2}^g u(\rho) &= -\frac{d_1}{d_2} \exp\left(ik\left[d_1 + d_2 + \frac{\rho^2}{2d_2}\right]\right) \int_{R^2} \hat{g}\left(\frac{\rho}{\lambda d_2} - x\right) e^{ix^2 d_1 \pi \lambda u}(-\lambda d_1 x) dx = \\ &= -\frac{d_1}{d_2} \exp\left(ik\left[d_1 + d_2 + \frac{\rho^2}{2d_2}\right]\right) \left[\hat{g}(x) \otimes_{\rho \lambda^{-1} d_2^{-1}} e^{ix^2 \pi \lambda d_1} u(-\lambda d_1 x) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Известно [1], что в предположениях (*) $u_2(\rho) = T_{d_1, d_2}^g u_1(\rho)$. Теперь рассмотрим систему из двух линз (рис. 2). Здесь N_1 , N_3 — плоскости источников и изображений, L_1 и L_2 — первая и вторая линзы, а плоскость N_2 делит расстояние между линзами L_1 и L_2 в некотором отношении d_3/d_2 так, чтобы выполнялись предположения (*).

Пусть P_1, P_2 — характеристики линз L_1 и L_2 соответственно,

$$g_1(z) = P_1(z) \exp \{ikz^2[1/d_1 + 1/d_2]\}, \quad (3)$$

$$g_2(z) = P_2(z) \exp \{ikz^2[1/d_3 + 1/d_4]\}, \quad (4)$$

а w_1, w_2, w_3 — комплексные амплитуды соответственно в плоскостях N_1, N_2 и N_3 . Тогда $w_3(\rho) = T_{d_3, d_4}^{g_2} w_2(\rho)$, $w_2(\rho) = T_{d_1, d_2}^{g_1} w_1(\rho)$, откуда

$$w_3(\rho) = T_{d_3, d_4}^{g_2} T_{d_1, d_2}^{g_1} w_1(\rho) = T_{d_1, d_2, d_3, d_4}^{g_1, g_2} w_1(\rho). \quad (5)$$

Подставив в (5) интегральное выражение (2) для операторов $T_{d_3, d_4}^{g_2}$ и $T_{d_1, d_2}^{g_1}$, получим

$$w_3(\rho) = \frac{d_1 d_3}{d_2 d_4} e^{ik(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \rho^2/2d_4)} \int_{R^2} \widehat{g}_2\left(\frac{\rho}{\lambda d_4} - x\right) e^{ix^2 \pi \lambda (d_3/d_2)(d_3 + d_2)} \times \\ \times \widehat{g}_1\left(-\frac{d_3}{d_2} x - y\right) e^{iy^2 \pi \lambda d_1} w_1(-\lambda d_1 y) dx dy. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что оператор $T_{d_1, d_2, d_3, d_4}^{g_1, g_2}$ зависит лишь от суммы чисел $d_3 + d_2$, а не от них самих (т. е. не зависит от расположения плоскости N_2).

Математически обратная задача формулируется следующим образом: по известным значениям операторов $T_{d_1, d_2}^{g_1} u_1(\rho)$ и $T_{d_1, d_2, d_3, d_4}^{g_1, g_2} w_1(\rho)$ в некоторой окрестности нуля $\{|\rho| < \varepsilon\}$ для некоторого класса пробных сигналов $\{u_1\}$ и $\{w_1\}$ и по известным расстояниям $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3 + d_4$ соответственно определить функции g, g_1, g_2 и все остальные расстояния (d_1, d_2 и $d_1, d_2, d_3 + d_2$). Из (4), (5) следует, что, решив такую задачу, можно найти характеристики P, P_1, P_2 . Далее, пользуясь условиями (1), легко вычислить фокусные расстояния f и f_1, f_2 :

$$-\frac{k}{2f} = \lim_{|z| \rightarrow 0} |z|^{-2} |\ln P(z)|, \\ -\frac{k}{2f_j} = \lim_{|z| \rightarrow 0} |z|^{-2} |\ln P_j(z)|, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь выбираются те ветви логарифмов, для которых $P(0) = 0, P_j(0) = 0, j = 1, 2$. Кроме того,

$$i\Psi(z) = (\ln P(z)) + (2k/f)|z|^2; \\ i\Psi_j(z) = (\ln P_j(z)) + (2k/f_j)|z|^2, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

В качестве тестовых сигналов рассмотрим сигналы двух типов:

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a; \\ \infty, & x = a \end{cases}$$

— точечный источник;

$$\Delta_a(x) = \delta_a(x) + \delta_{-a}(x)$$

— два точечных источника.

В статье показано, что можно вычислить функцию $g(z)$ (правда, с точностью до комплексного сопряжения), зная только модули $|T_{d_1, d_2}^g \delta_a(\rho)|$ и $|T_{d_1, d_2}^g \Delta_a(\rho)|$ для всех a и ρ , $|a| < \varepsilon, |\rho| < \varepsilon$. Это соответствует тому, что можно найти характеристику одной линзы, исходя из информации о распределении только интенсивности в плоскости изображений без информации о фазе. Кроме того, установлено, что для восстановления функций g_1 и g_2 и соответствующих расстояний достаточно знать значения оператора $T_{d_1, d_2, d_3, d_4}^{g_1, g_2} \delta_a(\rho)$ для всех a и ρ из некоторой окрестности 0.

1. Решение обратной задачи для одной линзы. В теореме 1 описан способ восстановления характеристики линзы $P(z)$ (или, что то же самое, функции $g(z)$) по известному распределению интенсивности $(|T_{d_1, d_2}^g \delta_a(\rho)|, |T_{d_1, d_2}^g \Delta_a(\rho)|)$ при изображении набора различных однопоточечных и двухточечных источников монохроматического света.

Теорема 1. Для любых двух функций $f(a, \rho)$ и $h(a, \rho)$, заданных в некоторой окрестности нуля $|a| < \varepsilon$, $|\rho| < \varepsilon$ и числа h существует не более двух функций $g(z)$, $\tilde{g}(z)$ и не более двух пар чисел d_1, d_2 и \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 , для которых

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= h = \tilde{d}_1 + \tilde{d}_2, \\ f(a, \rho) &= |T_{d_1, d_2}^g \delta_a(\rho)| = |T_{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2}^{\tilde{g}} \delta_a(\rho)|, \\ h(a, \rho) &= |T_{d_1, d_2}^g \Delta_a(\rho)| = |T_{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2}^{\tilde{g}} \Delta_a(\rho)|, \end{aligned}$$

причем $\tilde{g}(z) = \overline{g(-z)}$.

Замечание. Два решения этой задачи соответствуют двум возможным положениям плоскости N_2 относительно фокуса: если $1/d_1 + 1/d_2 - 1/f \neq 0$, то изображения на плоскостях N_2 и \tilde{N}_2 , для которых $1/d_1 + 1/d_2 - 1/f = -1/\tilde{d}_1 - 1/\tilde{d}_2 + 1/f$, совпадают (\tilde{d}_2 — расстояние между линзой и плоскостью \tilde{N}_2).

Действительно, если $\tilde{g}(z) = \overline{g(-z)}$, то из формул (3), (4), (7), (8) для соответствующих функций Ψ и $\tilde{\Psi}$, чисел f и \tilde{f} можно получить соотношения

$$-[1/d_1 + 1/d_2 - 1/f] = [1/\tilde{d}_1 + 1/\tilde{d}_2 - 1/\tilde{f}], \quad \Psi(z) = -\tilde{\Psi}(-z).$$

Функция $g(z)$ выражается в явном виде через функции $h(a, \rho)$ и $f(a, \rho)$:

$$\begin{aligned} g(z) &= J_x^{-1} \left[f(0, \lambda d_2 \rho) \frac{d_2}{d_1} \exp \left\{ i \arccos \left[\left(h \left(\frac{\rho \lambda d_1}{2}, \frac{\rho \lambda d_2}{2} \right) \right)^2 - \frac{d_1^2}{d_2^2} (f(0, \lambda d_2 \rho))^2 - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{d_1^2}{d_2^2} (f(0, 0))^2 \right] [2f(0, \lambda d_2 \rho) f(0, 0)]^{-1} + \varphi_1 \right\} \right] (z), \end{aligned} \quad (9)$$

где число φ_1 находится из условия $g(0) = 1$.

Доказательство. Из (2) следует, что

$$f(a, \rho) = (d_1/d_2) |\widehat{g}(\rho/\lambda d_2 + a/\lambda d_1)|, \quad (10)$$

$$h(a, \rho) = (d_1/d_2) |\widehat{g}(\rho/\lambda d_2 + a/\lambda d_1) + \widehat{g}(\rho/\lambda d_2 - a/\lambda d_1)|. \quad (11)$$

Напомним, что $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ и $a = (a_1, a_2)$ — двумерные векторы. Продифференцируем (10) в точках $(\rho_1, 0, 0, 0)$, $(0, \rho_2, 0, 0)$, $(0, 0, a_1, 0)$, $(0, 0, 0, a_2)$:

$$\frac{\partial f(a, \rho)}{\partial \rho_1}(\rho_1, 0, 0, 0) = \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{\lambda d_2} \frac{\partial |\widehat{g}(z_1, z_2)|}{\partial z_1} \left(\frac{\rho_1}{\lambda d_2}, 0 \right),$$

$$\frac{\partial f(a, \rho)}{\partial a_1}(0, 0, a_1, 0) = \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{\lambda d_1} \frac{\partial |\widehat{g}(z_1, z_2)|}{\partial z_1} \left(\frac{a_1}{\lambda d_1}, 0 \right),$$

$$\frac{\partial f(a, \rho)}{\partial \rho_2}(0, \rho_2, 0, 0) = \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{\lambda d_2} \frac{\partial |\widehat{g}(z_1, z_2)|}{\partial z_2} \left(0, \frac{\rho_2}{\lambda d_2} \right),$$

$$\frac{\partial f(a, \rho)}{\partial a_2}(0, 0, 0, a_2) = \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{\lambda d_1} \frac{\partial |\widehat{g}(z_1, z_2)|}{\partial z_2} \left(0, \frac{a_2}{\lambda d_1} \right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f(a, \rho)}{\partial a_1}(0, 0, 0, 0) = \frac{d_2}{d_1} \frac{\partial f(a, \rho)}{\partial \rho_1}(0, 0, 0, 0).$$

Легко показать, что для любых k_1 и k_2 , $k = k_1 + k_2$:

$$\frac{\partial^h f(a, \rho)}{\partial a_1^{k_1} \partial a_2^{k_2}}(0, 0, 0, 0) = \frac{d_2^h}{d_1^h} \frac{\partial^h f(a, \rho)}{\partial \rho_1^{k_1} \partial \rho_2^{k_2}}(0, 0, 0, 0).$$

Функция $g(x)$ финитна, т. е. равна нулю вне некоторой ограниченной области (апертуры). Поэтому ее преобразование Фурье продолжается до целой аналитической функции двух комплексных переменных [2]. Следовательно, функция $|\widehat{g}(z)|$ равна сумме некоторого абсолютно сходящегося степенного ряда четырех действительных переменных в некоторой окрестности нуля, и существуют такие k_1 и k_2 , что

$$\frac{\partial^{k_1+k_2} |\widehat{g}(z_1, z_2)|}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(0, 0) \neq 0. \quad \text{Тогда} \quad \frac{\partial^h f(a, \rho)}{\partial a_1^{k_1} \partial a_2^{k_2}}(0, 0, 0, 0) \neq 0 \text{ и}$$

$\frac{\partial^h f(a, \rho)}{\partial \rho_1^{k_1} \partial \rho_2^{k_2}}(0, 0, 0, 0) \neq 0$. Отсюда следует, что

$$d_1 = d_2 \left[\frac{\partial^h f(a, \rho)}{\partial \rho_1^{k_1} \partial \rho_2^{k_2}}(0, 0, 0, 0) \right]^{1/h} \left[\frac{\partial^h f(a, \rho)}{\partial a_1^{k_1} \partial a_2^{k_2}}(0, 0, 0, 0) \right]^{-1/h}. \quad (12)$$

Так как по условию $d_1 + d_2 = h$, из (12) находим оба числа: d_1 и d_2 . Теперь можно найти функцию $\widehat{g}(z)$. Из (10) получаем

$$|\widehat{g}(z)| = (d_2/d_1) |f(0, \lambda d_2 \rho)|. \quad (13)$$

Пусть $\widehat{g}(z) = |\widehat{g}(z)| e^{i\theta(z)}$, где $\theta(z)$ — главная ветвь $\arg \widehat{g}(z)$ (т. е. $-\pi < \theta(z) \leq \pi$), и пусть $\eta(z, t) = \cos(\theta(z) - \theta(t))$. Из (11) по теореме косинусов следует

$$(h(a, \rho))^2 = (d_1^2/d_2^2) [(f(a, \rho))^2 + (f(-a, \rho))^2 + 2f(a, \rho)f(-a, \rho) \times \\ \times \eta(\rho/\lambda d_2 + a/\lambda d_1, \rho/\lambda d_2 - a/\lambda d_1)].$$

Подставив $a = \rho(d_1/d_2)$ и учитывая, что $f(-(d_1/d_2)\rho, \rho) = f(0, 0)$, $f((d_1/d_2)\rho, \rho) = f(0, 2\rho)$, получаем

$$\left(h \left(\rho \frac{d_1}{d_2}, \rho \right) \right)^2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} \left[(f(0, 2\rho))^2 + (f(0, 0))^2 + 2f(0, 2\rho)f(0, 0) \eta \left(\frac{2\rho}{\lambda d_2}, 0 \right) \right],$$

откуда

$$\eta(\rho, 0) = \frac{(h(\rho \lambda d_1, \rho \lambda d_2))^2 - \frac{d_1^2}{d_2^2} (f(0, \lambda d_2 \rho))^2 - \frac{d_1^2}{d_2^2} (f(0, 0))^2}{2f(0, \lambda \rho d_2) f(0, 0)}. \quad (14)$$

Существует два решения уравнения (14):

$$\theta_{1,2} = \pm \arccos \left\{ \frac{\left(h \left(\frac{\rho \lambda d_1}{2}, \frac{\rho \lambda d_2}{2} \right) \right)^2 - \frac{d_1^2}{d_2^2} [(f(0, \lambda_2 \rho))^2 + (f(0, 0))^2]}{2f(0, 0) f(0, \rho \lambda d_2)} \right\} + \varphi_{1,2}, \quad (15)$$

где $\varphi_1 = \theta_1(0)$, $\varphi_2 = \theta_2(0)$. Им соответствуют функции

$$g(z) = J_x^{-1} [|\widehat{g}(x)| e^{i\theta_1(x)}](z) \text{ и } \widetilde{g}(z) = J_x^{-1} [|\widehat{g}(x)| e^{i\theta_2(x)}](z). \quad (16)$$

Числа φ_1 и φ_2 легко найти из условия нормировки: $g(0) = \widetilde{g}(0) = 1$. Очевидно, что $\varphi_1 = -\varphi_2$ и $\widetilde{g}(z) = \overline{g(-z)}$. Чтобы получить явное выражение (9) для функций $g(z)$ и $\widetilde{g}(z)$, достаточно подставить (13), (15) в (16).

2. Рассмотрим систему из двух линз, изображенную на рис. 2. Предполагается, что известны расстояние $h = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$ между сигналами и наблюдателем, а также комплексная амплитуда $T_{d_1, d_2, d_3, d_4}^{g_1, g_2} \delta_a(\rho)$

в плоскости N_3 , возникающая при изображении одноточечных источников δ_a для всех a из любой окрестности нуля. При доказательстве теоремы 2 приводится алгоритм, по которому можно найти расстояния $d_1, d_2 + d_3, d_4$ и функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$. Во введении показано (7), (8), как по этим данным определяются фокусные расстояния и aberrации линз L_1 и L_2 .

Теорема 2. Для любой функции $F(a, \rho)$ и числа h существует не более одного набора функций $g_1(z), g_2(z)$ и чисел $d_1, d_4, d_2 + d_3$ таких, что $F(a, \rho) = T_{d_1, d_2, d_3, d_4}^{g_1, g_2} \delta_a(\rho)$.

Доказательство. Подставив функцию $\delta_a(x)$ вместо $w_1(x)$ в (6), получаем

$$F(a, \rho) = \frac{d_1 d_3}{d_2 d_4} e^{ik(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \rho^2/2d_4)} \int_{R^2} \widehat{g}_2\left(\frac{\rho}{\lambda d_4} - x\right) \times \\ \times e^{ix^2 \pi \lambda d_3 (1 + d_3/d_2)} \widehat{g}_1\left(x\left(-\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{a}{\lambda d_1}\right) e^{ia^2 \pi / \lambda d_1} dx. \quad (17)$$

Положим $\beta = d_3/d_2, \alpha = \pi \lambda d_3 (1 + d_3/d_2)$. Тогда

$$\Phi(a, \rho) = \int_{R^2} \widehat{g}_2\left(\frac{\rho}{\lambda d_4} - x\right) e^{ix^2 \alpha} \widehat{g}_1\left(-\beta x + \frac{a}{\lambda d_1}\right) dx = \\ = \widehat{g}_2(z) \otimes_{\rho/\lambda d_1} \left(e^{ix^2 \alpha} \widehat{g}_1\left(-\beta x + \frac{a}{\lambda d_1}\right)\right).$$

Несмотря на то что функции $\widehat{g}_2(z)$ и $e^{ix^2 \alpha} \widehat{g}_1\left(-\beta x + \frac{a}{\lambda d_1}\right)$ могут не принадлежать пространству L^1 , их преобразования Фурье (как элементов пространства L^2) существуют и справедливы равенства

$$e^{ix^2 \alpha} \widehat{g}_1\left(-\beta x + \frac{a}{\lambda d_1}\right) = \frac{1}{\beta^2} \mathcal{F}_z \left[e^{-iy^2/4\alpha} \otimes_z g_1\left(-\frac{y}{\beta}\right) e^{ia y / \beta \lambda d_1} \right](x); \\ \Phi(a, \rho) = \frac{1}{\beta^2} \mathcal{J}_x \left[g_2(x) \left(e^{-iz^2/4\alpha} \otimes_x g_1\left(-\frac{z}{\beta}\right) e^{iaz/\beta \lambda d_1} \right) \right] \left(\frac{\rho}{\lambda d_1} \right). \quad (18)$$

Аналогично

$$\Phi(a, \rho) = \widehat{g}_1(-\beta z) \otimes_{-a/\beta \lambda d_1} e^{iz^2 \alpha} \widehat{g}_2\left(\frac{\rho}{\lambda d_4} - z\right) = \frac{1}{\beta^2} \mathcal{J}_z \left[g_1\left(-\frac{z}{\beta}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(e^{-iy^2/4\alpha} \otimes_z g_2(y) e^{-iy\rho/\lambda d_4} \right) \right] \left(-\frac{a}{\beta \lambda d_1} \right). \quad (19)$$

Выполнив в (18) обратное преобразование Фурье \mathcal{J}_ρ^{-1} по переменной ρ (это возможно сделать, так как функция, стоящая под знаком преобразования Фурье в (18), финитна и гладка и, следовательно, для нее справедлива формула обращения), находим

$$\mathcal{J}_\rho^{-1}[\Phi](a, \omega) = \frac{1}{\beta^2} g_2(\lambda d_2 \omega) \left[e^{-iz^2/4\alpha} \otimes_{\lambda d_4 \omega} g_1\left(-\frac{z}{\beta}\right) e^{iaz/\beta \lambda d_1} \right] = \\ = \frac{1}{\beta^2} g_2(\lambda d_4 \omega) \int_{R^2} e^{-i(\omega \lambda d_4 - z)^2/4\alpha} g_1\left(-\frac{z}{\beta}\right) e^{iaz/\beta \lambda d_1} dz = \\ = \frac{1}{\beta^2} g_2(\lambda d_4 \omega) \mathcal{J}_z \left[e^{-i(\omega \lambda d_4 - z)^2/4\alpha} g_1\left(-\frac{z}{\beta}\right) \right] \left(-\frac{a}{\beta \lambda d_1} \right). \quad (20)$$

Произведя в (20) обратное преобразование Фурье по переменной a (что правомерно, так как функция $g_1(z)$ финитна), имеем

$$\mathcal{J}_a^{-1} \mathcal{J}_\rho^{-1}[\Phi](v, \omega) = g_2(\lambda d_4 \omega) g_1(v \lambda d_1) e^{-i(\omega \lambda d_4 + v \lambda d_1 \beta)^2/4\alpha}. \quad (21)$$

Полагая в (21) поочередно $\omega = 0$ и $\nu = 0$, получим

$$J_a^{-1} J_\rho^{-1} [\Phi](\nu, 0) = e^{-i\nu^2 \lambda^2 d_1^2 \beta / 4\alpha} g_1(\nu \lambda d_1), \quad (22)$$

$$J_a^{-1} J_\rho^{-1} [\Phi](0, \omega) = e^{-i\omega^2 \lambda^2 d_4^2 / 4\alpha} g_2(\lambda d_4 \omega). \quad (23)$$

Чтобы найти функции g_1 и g_2 , нужно еще вычислить расстояния d_1, d_2, d_3, d_4 и функцию $\Phi(a, \rho)$.

Из (18), (19) видно, что функция $\Phi(a, \rho)$ является преобразованием Фурье от финитных функций по каждой из переменных a и ρ . Поэтому при каждом фиксированном значении ρ она единственным образом продолжается до голоморфной функции двух комплексных переменных $a = (a_1, a_2) = (a_1' + ia_1'', a_2' + ia_2'')$ и при каждом фиксированном значении a — до целой функции от переменных $\rho = (\rho_1, \rho_2) = (\rho_1' + i\rho_1'', \rho_2' + i\rho_2'')$.

Рассмотрим две новые целые функции одной комплексной переменной: $\varphi_1(t) = \Phi(t, 0, 0, 0)$ и $\varphi_2(t) = \Phi(0, 0, 0, t)$. По теореме Пэли — Винера [2] это непостоянные целые функции первого порядка, поэтому существуют такие действительные числа c_1 и c_2 , что $|\varphi_1(t)| \leq e^{c_1|t|}$, $|\varphi_2(t)| \leq e^{c_2|t|}$. Кроме того, они ограничены на действительной оси и по теореме Фрагмена — Линделефа не могут быть ограниченными ни на каком другом луче в комплексной плоскости. Следовательно,

$$0 \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln |\varphi_i(re^{i(3/4)\pi})| \leq c_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \ln |F(re^{i(3/4)\pi}, 0, 0, 0)| = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k}{2d_4} \frac{r^2 + \ln |\varphi_1(re^{i(3/4)\pi})|}{r^2} = \frac{k}{2d_4}; \quad (24)$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \ln |F(0, 0, 0, re^{i(3/4)\pi})| = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k}{2d_1} \frac{r^2 + \ln |\varphi_2(re^{i(3/4)\pi})|}{r^2} = \frac{k}{2d_1}. \quad (25)$$

Значения целых функций $F(0, 0, 0, \rho_2)$ и $F(a_1, 0, 0, 0)$ известны лишь в некоторой действительной окрестности нуля (т. е. для действительных $|a_1| < \varepsilon$ и $|\rho_2| < \varepsilon$). По теореме единственности для аналитических функций [3] этого достаточно, чтобы восстановить их значения на всей комплексной плоскости. Поэтому равенства (24), (25) позволяют определить числа $d_1, d_4, d_3 = (1 + \beta)^{-1} \beta (h - d_1 - d_4)$ и $d_2 = (1 + \beta)^{-1} (h - d_1 - d_4)$. Кроме того, теперь известна и функция

$$\Phi(a, \rho) = \frac{d_2 d_4}{d_1 d_3} e^{-ikh - ik\rho^2 / 2d_4 - ik a^2 / 2d_1} F(a, \rho).$$

Подставляя найденные значения в (22), (23), получим

$$g_1(z) = e^{iz^2 \beta / 4\alpha} J_a^{-1} J_\rho^{-1} \left[\frac{d_2 d_4}{d_1 d_3} \exp \left(-ik \left(h + \frac{\rho^2}{2d_4} + \frac{a^2}{2d_1} \right) \right) F(a, \rho) \right] \left(\frac{z}{\lambda d_1}, 0 \right), \quad (26)$$

$$g_2(z) = e^{iz^2 \beta / 4\alpha} J_a^{-1} J_\rho^{-1} \left[\frac{d_2 d_4}{d_1 d_3} \exp \left(-ik \left(h + \frac{\rho^2}{2d_4} + \frac{a^2}{2d_1} \right) \right) F(a, \rho) \right] \left(0, \frac{z}{\lambda d_2} \right). \quad (27)$$

Таким образом, в статье приведено явное решение — формулы (12), (26), (27) — двух поставленных во введении задач: восстановление фокусных расстояний и функций аббераций для одной (см. рис. 1) и двух (см. рис. 2) неидеальных линз по известным изображениям набора тестовых сигналов. Решения непрерывно зависят от начальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nazarathy M., Shamir I. Fourier optics described by operator algebra.— JOSA, 1980, vol. 70, N 2.
2. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1976.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 30 октября 1981 г.;
окончательный вариант — 14 июня 1983 г.*

УДК 621.391.24 : 533.6.071

А. Н. МОРГУНОВ, Н. И. НАГОРНАЯ
(Рязань)

ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛА ЛДИСа АВТОМАТИЧЕСКИМ УПРАВЛЯЕМЫМ ФИЛЬТРОМ

Введение. Автоматический управляемый фильтр (АУФ) представляет собой многоканальную систему, осуществляющую операции слежения за доплеровским сдвигом частоты и выделения полезной составляющей входного сигнала лазерного доплеровского измерителя скорости (ЛДИС). Один из первых вариантов технической реализации устройства обработки доплеровского сигнала с полуавтоматической системой АУФ был предложен в работе [1]. Обобщенная функциональная схема АУФ представлена на рис. 1. Каждый из N каналов включает в себя фильтрующий элемент $1-1 \div 1-N$ и нормально закрытый ключ $2-1 \div 2-N$. Сигналы с выходов фильтров поступают на управляющее устройство 3, которое открывает ключ, если в соответствующем канале существует доплеровский сигнал. После прохождения ключа сигнал поступает на объединитель каналов 4 и через него на выход АУФ.

Доплеровский сигнал в одночастичном режиме является последовательностью радиоимпульсов, каждый из которых может обрабатываться отдельно [2]. Доплеровский импульс, воздействующий на АУФ, представляет собой аддитивную смесь полезной $S(t)$, помеховой $n_s(t)$ и шумовой $\psi(t)$ составляющих. Полезная и помеховая составляющие доплеровского сигнала импульса могут быть определены [2, 3] детерминированными функциями со случайными параметрами:

$$S(t) = A \exp \{-\alpha^2 t^2\} \cos \omega_d t; \quad (1)$$

$$n_s(t) = (1 + \varepsilon) A \exp \{-\alpha^2 t^2\}. \quad (2)$$

Здесь A и α — случайные от импульса к импульсу параметры, зависящие от координаты входа аэрозольной частицы в измерительный объем; ω_d — доплеровский сдвиг частоты; $m = 1/(1 + \varepsilon)$ — коэффициент видности [4] интерференционной картины в измерительном объеме. Шумовая составляющая обусловлена рядом факторов, среди которых следует отметить дробовой шум фотоэлектронного умножителя [2, 3], фазовый шум [5] и доплеровский фон [6].

В работах [7, 8] с учетом комплексного действия помех обосновывается построение канальных фильтров АУФ с передаточной функцией вида

$$K(j\omega) = \omega_c k_\Phi \beta_\Phi / [\omega_c \beta_\Phi + j(\omega - \omega_c)], \quad (3)$$

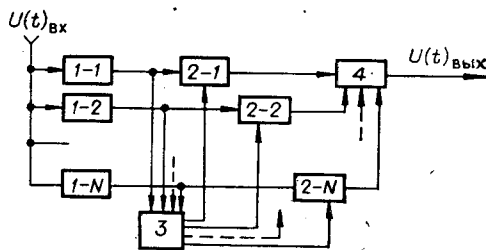


Рис. 1.