

Рис. 1.

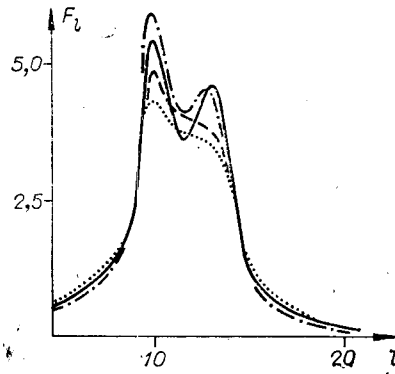


Рис. 2.

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i x(t-i) + \beta_2 n(t-2) + \beta_1 n(t-1) + n(t) \quad (\alpha_1 = 1,65, \alpha_2 = -2,32,$$

$$\alpha_3 = 1,37, \alpha_4 = -0,69, \beta_1 = -0,85, \beta_2 = 0,87; N = 200, T = 30; |B(\tau)| \leq 0,1$$
 при $|\tau| > 30$). Аналогично рис. 1 сплошная линия — теоретический спектр, пунктирная — традиционная оценка, штриховая — оценка f_1 и штрихпунктирная — оценка f_2 с высоким разрешением. Этот пример характеризуется малой длиной реализации T и значительными осцилляциями ковариационной функции для $\tau > T$. При этом оценка f_2 уверенно различает два пика, в то время как традиционная f_0 , а также f_1 не позволяют их разрешить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коняев К. В. Спектральный анализ случайных океанологических полей.— Л.: Гидрометеоздат, 1981.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1974, т. 1.
3. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория.— М.: Мир, 1980.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований.— М.: Наука, 1969, т. 1.
5. Кулешов Е. Л. Итеративное оценивание спектральной плотности стационарного случайного процесса.— Автометрия, 1982, № 6.
6. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 8 февраля 1983 г.

УДК 621.391.172

Ю. П. БАЛАНДИН, В. Ф. БИРЮКОВ, Г. И. ЛАБУТИН
(Москва)

АППРОКСИМАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ БАЗИСОВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИСКАЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Методы решения обратных задач применяются в последнее время и для случая обработки результатов измерений многомерных дискретных сигналов, в обозначении которых присутствуют 2—3 и более индексов (цифровые изображения, данные растровой спектрометрии и т. п.).

Известные приемы сведения многомерных задач к задачам с высоким порядком одного индекса не всегда являются оправданными, поскольку при этом теряются корреляционные связи между элементами многомерного сигнала для близких значений индексов, а также возникают трудности последующей интерпретации результата обработки.

Многомерные задачи даже при относительно невысоких порядках отдельных индексов требуют для своего решения больших вычислительных ресурсов. Условия обработки становятся еще более жесткими при оперативном обновлении информации и наличии ограничений на память и производительность вычислительных средств. Методы обработки при этом должны сочетать приемлемую сложность реализации с точностью, близкой к потенциально достижимой [1].

Цель настоящей работы — разработка регуляризирующих алгоритмов (РА) решения многомерных обратных задач, согласованных с характеристиками измерительных систем и допускающих применение быстрых спектральных преобразований.

Постановка задачи. При постановке и решении задачи будем пользоваться аппаратом многомерных матриц, обладающих структурными свойствами [2].

Пусть многомерная система измерения описывается, подобно [3], многоиндексным дискретным оператором суперпозиции в конечной области:

$$Y_{\alpha\beta\dots\gamma} = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^M \dots \sum_{\lambda=1}^L h_{\alpha-\nu+1, \beta-\mu+1, \dots, \gamma-\lambda+1} X_{\nu\mu\dots\lambda}, \quad (4)$$

где $\alpha = \overline{1, A}$; $\beta = \overline{1, B}$; ...; $\gamma = \overline{1, G}$; $h_{\alpha\dots\lambda}$ — многомерная аппаратная функция, заданная в гиперпараллелепипеде размерами $R = A - N + 1$, $S = B - M + 1$, ..., $Q = G - L + 1$ и инвариантная к индексам измерения $\alpha, \beta, \dots, \gamma$.

С учетом аддитивных ошибок измерений после агрегирования [2] выражения (4) запишем многомерно-матричное уравнение измерения первого рода:

$$Y(p, 0) = H(p, p)X(p, 0) + N(p, 0). \quad (2)$$

Здесь $Y(p, 0) \equiv \{Y_{\alpha\beta\dots\gamma}^{++\dots+}\}$ — многомерная матрица измерений гиперстолбцовой структуры; $X(p, 0) \equiv \{X_{\nu\mu\dots\lambda}^{++\dots+}\}$ — многомерный гиперстолбец восстанавливаемого сигнала; $N(p, 0) = \{N_{\alpha\beta\dots\gamma}^{++\dots+}\}$ — гиперстолбец шума измерений; $H(p, p) \equiv \{h_{\alpha\nu\beta\mu\dots\gamma\lambda}^{+-\dots-}\}$ — многомерная переопределенная вещественная матрица с линейно независимыми гиперстолбцами. Последнее обеспечивает единственность решения (2) относительно $X(p, 0)$.

Целое положительное число p определяет размерность матрицы (число индексов). Знаки над индексами помечают их структурный тип: столбцовый (+) и строчной (−) индексы. «Старшинство» индексов задается их положением слева направо. Размер многомерной матрицы $H(p, p)$ определяется произведением верхних пределов всех ее индексов: $A \times N \times B \times M \times \dots \times G \times L$. Матрица $H(p, p)$ является многомерной тепловой матрицей, которая в табличном представлении [2] образует блочно-иерархическую таблицу (условно показана на рис. 1).

При произвольном попарном изменении старшинства индексов «младшие» блоки остаются теплицевыми двумерными матрицами, т. е. любое двумерное сечение многомерной матрицы $H(p, p)$ — обычная теплицева матрица. Это следует из симметричности (1) относительно попарного изменения «старшинства» индексов в $Y_{\alpha\beta\dots\gamma}$ и $X_{\nu\mu\dots\lambda}$.

Сделаем дополнительные предположения о характере многомерного сигнала $X(p, 0)$ и ошибок измерения.

1. При детерминированных $X(p, 0)$, $N(p, 0)$ погрешность ограничена по норме:

$$[N^T(p, 0)N(p, 0)]^{1/2} \leq \omega.$$

2. Для $X(p, 0)$ задана стабилизирующая теплицева матрица $C(p, p)$, ограничивающая разности до k -го порядка, что эквивалентно использованию информации о гладкости решения в непрерывном случае [4].

3. При случайных $X(p, 0)$, $N(p, 0)$ их статистические характеристики являются инвариантными к индексам измерения (по аналогии со стационарным случаем) и заданы невырожденными корреляционными матрицами $R_X(p, p)$, $R_N(p, p)$. Важно отметить, что матрицы $R_X(p, p)$, $R_N(p, p)$, как и $C(p, p)$, — многомерные теплицевы матрицы.

4. Будем предполагать также, что аппаратная функция $h_{p\sigma \dots \kappa}$ может быть задана с детерминированной аддитивной погрешностью $\Delta h_{p\sigma \dots \kappa}$, не изменяющей теплицеву структуру многомерного оператора $H(p, p)$.

Задача состоит в устойчивом восстановлении многомерного сигнала $X(p, 0)$ по измерениям $Y(p, 0)$ с учетом сделанных предположений.

Алгоритмы решения многомерных обратных задач в пространственной области. Линейная несмещенная оценка многомерной матрицы $X(p, 0)$ при отсутствии априорных данных о восстанавливаемом сигнале и некоррелированной погрешности представляется в виде

$$\hat{X}(p, 0) = [H^T(p, p)H(p, p)]^{-1}H^T(p, p)Y(p, 0). \quad (3)$$

Решение (3) характеризуется плохой обусловленностью матрицы $H^T(p, p)H(p, p)$. Регуляризация задачи по Тихонову при помехе с корреляционной матрицей $R_N(p, p)$ приводит к многомерному алгоритму

$$\hat{X}_\alpha(p, 0) = [H^T(p, p)R_N^{-1}(p, p)H(p, p) + \alpha\Gamma(p, p)]^{-1}H^T(p, p)R_N^{-1}(p, p)Y(p, 0), \quad (4)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

Матрица $\Gamma(p, p)$ в (4) в зависимости от имеющихся в распоряжении априорных данных может иметь смысл стабилизатора $C(p, p)$ либо матрицы $(1/\alpha)R_X^{-1}(p, p)$.

Выбор параметра регуляризации α проводится по невязке или с использованием статистических свойств сигнала и помехи [4], а также с учетом [1].

Алгоритм (4) обладает оптимальным свойством в смысле минимума ошибок восстановления. Его реализация сопряжена с большими вычислительными затратами при обращении многомерных матриц.

Спектральные алгоритмы решения многомерных обратных задач. Для перевода алгоритмов (3), (4) в спектральную область воспользуемся сингулярным разложением матриц [5].

Для многомерной матрицы $H(p, p)$ прямое и обратное сингулярные преобразования запишутся в виде

$$H(p, p) = U(p, p)\Lambda^{1/2}(p, p)V^T(p, p), \quad (5)$$

$$\Lambda^{1/2}(p, p) = U^T(p, p)H(p, p)V(p, p), \quad (6)$$

где $U(p, p)$, $V(p, p)$ — многомерные ортогональные матрицы собственных элементов для матриц $H(p, p)H^T(p, p)$ и $H^T(p, p)H(p, p)$ соответственно; $\Lambda^{1/2}(p, p)$ — диагональная в табличном представлении матрица сингулярных чисел $H(p, p)$. Эти числа являются вещественными и различными в силу определения (2).

Такое представление позволяет записать алгоритм (3) в виде

$$\hat{X}(p, 0) = V(p, p)\Lambda^{-1/2}(p, p)U^T(p, p)Y(p, 0). \quad (7)$$

Для реализации алгоритма (7) необходимо решить предварительно проблему собственных элементов и сингулярных чисел многомерной матрицы $H(p, p)$.

Упрощение задачи может быть достигнуто использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ), обладающего быстрыми алгоритмами (БПФ). При этом предполагается достраивание многомерной теплицевой матрицы до циркулянта с собственными элементами в виде строк (столбцов) матрицы ДПФ. (Одномерная задача решается в [6], для решения двумерной задачи можно указать работу [3]). Однако переход к цирку-

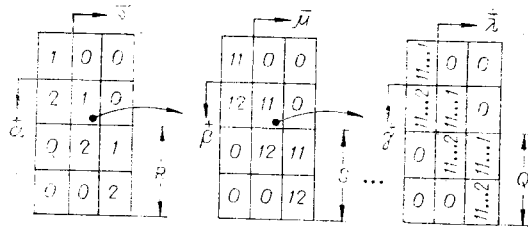


Рис. 1.

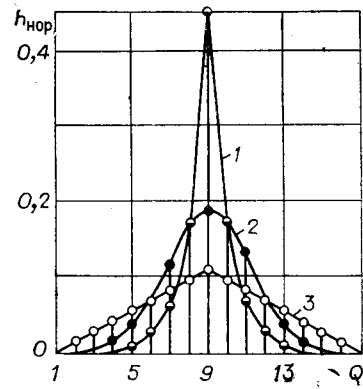


Рис. 2.

лянтной модели вносит искажение в результат восстановления, что связано с существенной переопределенностью матрицы $H(p, p)$. Переопределенность $H(p, p)$ обусловлена относительно невысокими размерами отдельных индексов многомерного массива, поскольку общий размер многомерной матрицы определяется их произведением. (Отношения эффективных сечений аппаратной функции $h_{\text{рост...к}}$ к размерам соответствующих индексов $Y_{\alpha\beta\dots\gamma}(R/A; S/B; \dots; Q/G)$ в условиях ограниченной сложности задачи достигают 20—30%.)

Аппроксимация собственного базиса многомерных пространственно-инвариантных аппаратных функций. Рассмотрим возможность применения для решения многомерных обратных задач базиса, более близкого к собственному базису многомерного оператора $H(p, p)$, чем комплексный базис Фурье.

Проведем декомпозицию [2] матрицы $H(p, p)$, т. е. осуществим линейное преобразование, выделяющее один из ее двумерных блоков:

$$H_{\alpha\beta\mu\dots}(1, 1) = (\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta} \otimes \dots) H(p, p) (\bar{v} \otimes \bar{\mu} \otimes \dots). \quad (8)$$

Здесь $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ — строчные, $\bar{v}, \bar{\mu}$ — столбцовые единичные векторы с 1 на позициях α, β, v, μ и 0 — на остальных, \otimes — знак кронекерова произведения матриц.

Полученная двумерная матрица, как было отмечено выше, является неквадратной теплицевой матрицей. Для простоты индексы, нумерующие «старшие» блоки в левой части (8), опустим.

Было проведено экспериментальное исследование двумерной теплицевой матрицы $H(1, 1)$ с целью аппроксимации элементов ее собственного базиса.

Условия эксперимента. Размер обрабатываемого одномерного сечения выбирался из условий измерений в многомерном случае $L = 64, 128$. Эффективная ширина одномерного сечения многомерной аппаратной функции $Q = 5, 9, 17, 31$. Семейство теплицевых матриц $H(1, 1)$ порождалось вещественным оператором суперпозиции измеряемого сигнала с типовыми видами симметричных аппаратных функций (функция Гаусса, затухающая экспонента, экспоненциально-затухающий косинус, треугольная функция). Для первых трех типов варьировались параметры затухания.

Исследуемые теплицевы матрицы полностью определяются массивами действительных чисел из дискретных значений аппаратных функций, которые располагаются на диагональной полосе матрицы $H(1, 1)$ шириной Q .

Сингулярное разложение теплицевой матрицы проводилось с помощью стандартной процедуры SVD [6], которая позволяет вычислять элементы собственного базиса (матрицы $U(1, 1)$ и $V(1, 1)$), а также сингулярные числа любой вещественной матрицы.

Приведем оценки вычислительных затрат для ЭВМ ЕС-1022. Обозначим чистое время работы процессора через t_1 , а необходимый объем

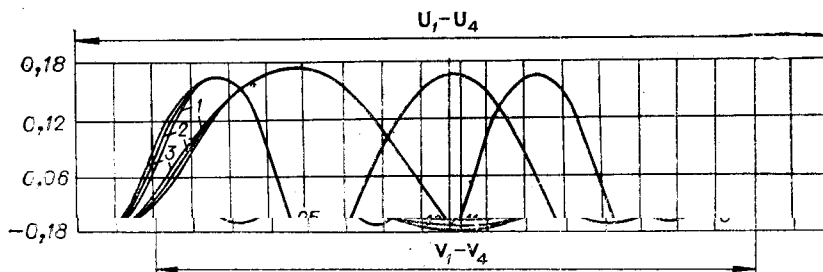


Рис. 3.

оперативной памяти — через w_1 . Тогда при $L = 64$ $t_1 = 11$ мин, $w_1 = 142$ Кбайт; при $L = 128$ $t_1 = 46$ мин, $w_1 = 180$ Кбайт.

Выводы по эксперименту. 1. Собственные векторы двумерной теплоцевой матрицы практически совпадают для различных симметричных нормированных аппаратных функций, затухающих до уровня 0,1% от их максимальных значений. Этот вывод справедлив для разных значений L , Q и соотношений между ними. На рис. 2 показаны примеры нормированных аппаратных функций. Рис. 3 иллюстрирует соотношение между соответствующими дискретными базисными функциями.

2. Столбцы ортогональной матрицы $V(1, 1)$ меньшего размера L совпадают со столбцами ортогональной матрицы $U(1, 1)$ большего размера G для значений индекса $\gamma = (Q - 3)/2 + 1$, $G - (Q - 3)/2$. За пределами этого интервала значения собственных векторов матрицы $U(1, 1)$ затухают. Скорость затухания связана со скоростью затухания соответствующей аппаратной функции в пространственной области. На рис. 3 отмечено соответствие между размерами и характером изменения четырех первых собственных векторов матриц $U(1, 1)$ и $V(1, 1)$.

3. Сингулярные числа для каждой из аппаратных функций различны и определяют ее спектр в собственном базисе.

4. Столбцы и строки ортогональных матриц $U(1, 1)$, $V(1, 1)$ представляют собой дискретные функции, близкие к вещественной синусоидальной функции следующего вида:

$$\tilde{V}_{\lambda_1 \lambda_2} = (-1)^{\lambda_2} \sqrt{\frac{2}{L+3}} \sin\left(\frac{\lambda_2 (\lambda_1 + 1) \pi}{L+3}\right); \quad \lambda_1, \lambda_2 = \overline{1, L}; \quad (9)$$

$$\tilde{U}_{\gamma_1 \gamma_2} = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma_1 = \overline{1, (Q-3)/2}, \\ (-1)^{\gamma_2} \sqrt{2/(L+3)} \sin(\gamma_2 (\gamma_1 - (Q-3)/2) \pi / (L+3)) & \\ & \text{при } \gamma_1 = \overline{(Q-3)/2 + 1, G - (Q-3)/2}, \\ 0 & \text{при } \gamma_1 = \overline{G - (Q-3)/2 + 1, G}; \gamma_1, \gamma_2 = \overline{1, G}. \end{cases} \quad (10)$$

5. Спектр модифицированного синусного преобразования (9), (10) для нормированных аппаратных функций отличается от собственного спектра во 2—3-м знаке (рис. 4).

Модифицированное синусное преобразование (9), (10) с ортогональными матрицами $U(1, 1)$, $V(1, 1)$ примем в дальнейшем в качестве аппроксимаций матриц собственного дискретного базиса $U(1, 1)$, $V(1, 1)$.

Как видно, преобразование (9), (10) зависит только от размеров матрицы $H(1, 1)$, поэтому оно одинаково для всех блоков одномерного сечения многомерной теплоцевой матрицы $H(p, p)$. Используем это важное свойство для доказательства сепарабельности (разделимости по индексам)

сам) многомерного синусного преобразования, аппроксимирующего собственный базис многомерной теплицевой матрицы.

Вернемся к выражению (8) для младшего блока многомерной теплицевой матрицы. Аппроксимирующее преобразование для него будет иметь вид

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha\nu\beta\mu\dots}^{1/2}(1, 1) = \tilde{U}^T(1, 1) H_{\alpha\nu\beta\mu\dots}(1, 1) \tilde{V}(1, 1), \quad (11)$$

где $\tilde{\Lambda}_{\alpha\nu\beta\mu\dots}^{1/2}(1, 1)$ — неквадратная $(L \times G)$ -матрица, аппроксимирующая матрицу сингулярных чисел для $H_{\alpha\nu\beta\mu\dots}(1, 1)$.

Агрегируя выражение (11) по индексам $\alpha\nu\beta\mu$ (агрегирование — линейная операция, обратная декомпозиции [2]), получим сепарабельную аппроксимацию сингулярного разложения многомерной теплицевой матрицы

$$\tilde{\Lambda}^{1/2}(p, p) = [\tilde{U}_p^T(1, 1) \otimes \dots \otimes \tilde{U}_1^T(1, 1)] H(p, p) \times \\ \times [\tilde{V}_p(1, 1) \otimes \dots \otimes \tilde{V}_1(1, 1)], \quad (12)$$

где $\tilde{U}_i(1, 1)$, $\tilde{V}_j(1, 1)$ — двумерные матрицы синусного преобразования (9), (10) для i, j уровней иерархии ($i, j = \overline{1, p}$).

Алгоритмы решения многомерной обратной задачи с использованием аппроксимирующего базиса. При решении обратной многомерной задачи основным вопросом является построение регуляризующих алгоритмов. РА будем строить в области дискретного синусного спектра подобно тому, как это делается для непрерывных собственных спектров в [7].

Определим в области синусного спектра скалярную функцию $\varphi_s(\lambda_s, \alpha)$ дискретного аргумента λ_s , зависящую от непрерывного параметра $\alpha > 0$. Множество значений λ_s принадлежит к синусному спектру многомерной теплицевой матрицы $\lambda_s \in S[H^T(p, p)H(p, p)]$. Запишем условие

$$\sup_{\lambda_s \in S} \frac{|\varphi_s(\lambda_s, \alpha)|}{\sqrt{\lambda_s}} = K_\alpha < \infty. \quad (13)$$

Образум далее скалярную функцию

$$\psi_s(\lambda_s, \alpha) = \varphi_s(\lambda_s, \alpha)/\lambda_s. \quad (14)$$

В соответствии со скалярной функцией $\psi_s(\lambda_s, \alpha)$ определим многомерно-матричную функцию $\Psi_s(\Lambda(p, p), \alpha)$. Тогда РА в области синусного спектра будет иметь вид

$$\tilde{X}_s^\alpha(p, 0) = \Psi_s(\tilde{\Lambda}(p, p), \alpha) \tilde{Y}_s(p, 0), \quad (15)$$

где $\tilde{X}_s(p, 0)$, $\tilde{Y}_s(p, 0)$ — результаты синусного преобразования над $X(p, 0)$, $Y(p, 0)$. Пользуясь обратным синусным преобразованием, получим РА в пространственной области:

$$\tilde{X}_\alpha(p, 0) = \tilde{V}(p, p) \Psi_s(\tilde{\Lambda}(p, p), \alpha) \tilde{U}^T(p, p) Y(p, 0). \quad (16)$$

Конкретные виды Ψ_s можно записать так же, как для скалярных функций в [7].

Приведем в области синусного спектра многомерный алгоритм (4), соответствующий наиболее распространенному алгоритму статистической регуляризации [4]:

$$\tilde{X}_s^\alpha(p, 0) = [\tilde{\Lambda}_H^{1/2T}(p, p) \tilde{\Lambda}_N^{-1}(p, p) \tilde{\Lambda}_H^{1/2}(p, p) + \alpha \tilde{\Lambda}_\Gamma(p, p)]^{-1} \times \\ \times \tilde{\Lambda}_H^{1/2T}(p, p) \tilde{\Lambda}_N^{-1}(p, p) \tilde{Y}_s(p, 0). \quad (17)$$

Здесь $\tilde{\Lambda}_H^{1/2}(p, p)$, $\tilde{\Lambda}_N(p, p)$, $\tilde{\Lambda}_\Gamma(p, p)$ — многомерные диагональные матрицы, полученные из результатов синусного преобразования матриц $H(p, p)$, $R_N(p, p)$, $\Gamma(p, p)$ приравниванием нулю недиагональных элементов.

Оценка погрешностей. Погрешность восстановления по алгоритму (17) складывается из погрешности аппроксимации собственного базиса, смещения регуляризованного решения относительно псевдорешения (3) без помех, а также погрешностей от ошибок в измерениях и задании аппаратной функции.

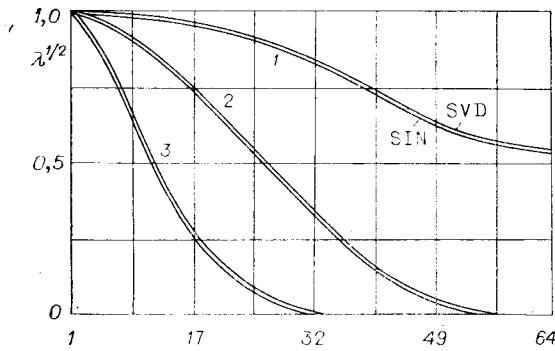


Рис. 4.

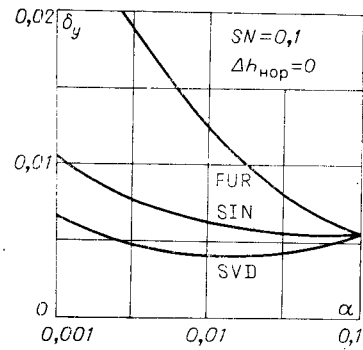


Рис. 5.

Мерой близости аппроксимирующего базиса к собственному может служить средний квадрат недиагональных элементов в матрице $U^T(p, p)H(p, p)V(p, p)$ (норма Гильберта — Шмидта [8]). Остальные составляющие погрешности восстановления могут быть проанализированы подобно тому, как это делается в [1, 9].

Обобщенной характеристикой, легко поддающейся экспериментальной оценке, является дисперсия невязки $\tilde{\delta}_y = \|Y(p, 0) - H(p, p)\tilde{X}_\alpha(p, 0)\|^2$.

Относительно быстродействия предложенных алгоритмов следует отметить, что они могут быть реализованы с помощью вещественного дискретного синусного преобразования, для которого существуют быстрые алгоритмы, более эффективные, чем БПФ [8].

Пример. С целью исследования погрешностей аппроксимации собственного базиса моделировалась задача восстановления пиков спектра обратнорассеянных ионов низких энергий в одномерном сечении. Аппаратная функция задавалась в виде гауссоиды

$$h_x = \exp \{ -[(x - (Q + 1))/2]^2 / 2B^2 \}$$

с параметрами $Q = 17$, $B = 2$. Размеры обрабатываемого и восстанавливаемого сигналов соответственно равны $L = 48$, $G = 64$.

Исследование помехоустойчивости проводилось для трех спектральных алгоритмов восстановления с различными базисными функциями дискретного аргумента: собственный базис (SVD), базис Фурье (FUR) и синусный базис (9), (10) (SIN). Регуляризация алгоритмов осуществлялась в спектральной области в соответствии с (17).

В качестве варьируемых параметров выбирались: параметр регуляризации α , уровень некоррелированной аддитивной помехи с равномерным законом распределения SN, приведенная погрешность в задании аппаратной функции $\Delta h_{нор}$.

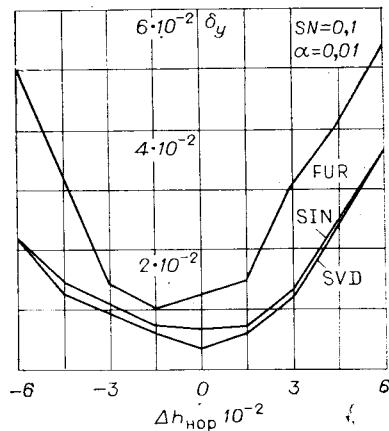


Рис. 6.

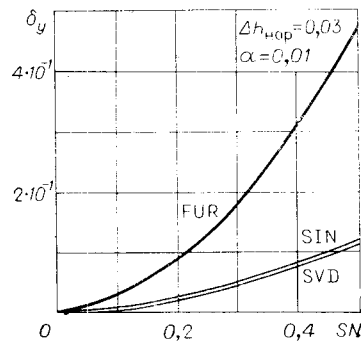


Рис. 7.

На рис. 5 представлена зависимость невязки от изменения параметра регуляризации α при $\Delta h_{\text{нор}} = 0$, $SN = 0,1$.

На рис. 6 показана чувствительность соответствующих алгоритмов к вариации аппаратной функции при $\alpha = 0,01$, $SN = 0,1$.

Рис. 7 отражает зависимость невязки от уровня аддитивной шумовой составляющей при $\alpha = 0,01$, $\Delta h_{\text{нор}} = 0,03$. Выбранное значение ошибки $\Delta h_{\text{нор}} = 3\%$ находится в пределах 5%-ной погрешности, характерной для идентификации аппаратных функций.

ВЫВОДЫ

Показано, что при построении РА решения многомерных обратных задач для широкого класса пространственно-инвариантных измерительных систем более эффективно применять вместо дискретного преобразования Фурье модифицированное дискретное синусное преобразование, аппроксимирующее собственные элементы линейных операторов искажения. Доказана сепарабельность аппроксимирующего базиса в многомерном случае.

Результаты экспериментального исследования спектральных алгоритмов восстановления подтверждают меньшую чувствительность предложенного базиса к параметру регуляризации, аддитивной помехе измерения и вариации аппаратной функции, чем базис Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Бирюков В. Ф., Тумаркин В. И. Принцип сложности в теории управления (о проектировании технически оптимальных систем и проблеме корректности).— М.: Наука, 1977.
2. Милов Л. Т. Многомерно-матричные производные и анализ чувствительности систем автоматического управления.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 9.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
5. Форсайт Ж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.
6. Воскобойников Ю. Е., Томсонс Я. Я. Выбор параметра регуляризации и ошибки восстановления входного сигнала в методе статистической регуляризации.— Автоматика, 1975, № 4.
7. Бакушинский А. Б. К проблеме построения линейных регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1973, № 1.
8. Yip P., Rao K. R. On the computation and the effectiveness of discrete sine transform.— Comput. and Electron. Eng., 1980, vol. 7, p. 45—55.
9. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.— М.: Связь, 1980.

*Поступила в редакцию 25 января 1983 г.;
окончательный вариант — 17 августа 1983 г.*

УДК 681.518

В. В. СЕРГЕЕВ

(Куйбышев)

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗВЕРТКИ ГИЛЬБЕРТА — ПЕАНО

Во многих приложениях вычислительной техники, например при автоматизации научных исследований, важную роль играет цифровая обработка изображений. Круг вопросов, возникающих при обработке изображений, чрезвычайно широк: фильтрация и улучшение качества, эффективное кодирование, выделение признаков и т. д. [1—3]. Для решения