УДК 681.5.015

О. А. КАЦЮБА, Б. Б. ХАКИМОВ
(Куйбышев)

АЛГОРИТМ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

В настоящее время в теории обработки статистической информации одной из основных является задача параметрической оценки нелинейных относительно параметров регрессионных моделей. Методы получения этих оценок можно разделить на две большие группы. При использовании методов 1-й группы имеется информация о функции распределения наблюдаемых величин (байесов метод, метод максимального правдоподобия и т. д.). При использовании методов 2-й группы не требуется априорного знания законов распределения; к ним относятся методы типа наименьших квадратов, наименьших модулей и т. д. Однако эти методы дают оценки с определенными оптимальными свойствами [1] только для линейных относительно параметров моделей; применение метода наименьших квадратов для нелинейных моделей не гарантирует даже состоятельности полученных оценок [2]. В [3] показано, что, имея оценки по методу наименьших квадратов и наименьших модулей, можно получать состоятельные оценки с улучшенными дисперсионными характеристиками, но и в этом случае эффективность оценок далека от эффективности оценки максимального правдоподобия. В настоящей статье делается попытка на основе введенных линейно-комбинированных оценок получить при нелинейной параметризации оценки, не требующие априорного знания законов распределения результатов наблюдений, асимптотическая эффективность которых достаточно близка к асимптотической эффективности оценок максимального правдоподобия.

Постановка задачи. Пусть имеет место стандартная задача несмещенного оценивания регрессионных функций: наблюдаемые значения y_i представляются в виде $y_i = \eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{b}_0) + \xi_i$, где ξ_i — случайные независимые величины ($i = \overline{1, N}$), удовлетворяющие условиям $E(\xi_i) = 0$, $E(\xi_i^2) = \sigma_i^2$ (E — оператор математического ожидания); $\mathbf{x}$ — вектор входных переменных; $\mathbf{b}_0$ — вектор истинных параметров.

Требуется определить состоятельные оценки $\boldsymbol{\beta}$ с асимптотической эффективностью, близкой к асимптотической эффективности оценки максимального правдоподобия или совпадающей с ней, не зная априорно закона распределения $f(\xi_i) = f(y_i, \mathbf{b})$.

Введем более точное, чем в [3], определение квазиправдоподобной оценки: допустим, что для оценивания $\mathbf{b}_0$ применяется метод максимального правдоподобия в предположении о том, что y_i подчинена некоторому закону распределения $\varphi(y_i, \mathbf{b})$, а на самом деле этот закон имеет вид $f(y_i, \mathbf{b})$.

Пусть статистическая модель представлена параметрическим семейством вероятностных мер $F^N = \{F_\mathbf{b}^N, \mathbf{b} \in B\}$ на выборочном пространстве χ, A (χ, A — измеримое пространство); пусть семейство F^N доминируется некоторой мерой ν и существует функция

$$\frac{dF_\mathbf{b}^N(y_1, \ldots, y_N; \mathbf{b})}{\partial\nu(y_1, \ldots, y_N)} = \frac{dF_\mathbf{b}^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b})}{\partial\nu} = f^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b}),$$

где B — открытое множество.

Определение 1. Функцией квазиправдоподобия параметра $\mathbf{b}$ называется неотрицательная вещественная функция

$$\varphi^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) \neq f^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) \text{ на } B \times \chi,\ \mathbf{b} \in B,\ \mathbf{Y} \in \chi.$$

Оценкой максимального квазиправдоподобия для заданных функций квазиправдоподобия $\varphi^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$ является A — измеримая функция $\boldsymbol{\beta}_\varphi : \chi \to B$, определяемая из соотношения $\varphi^N(\mathbf{Y}', \boldsymbol{\beta}_\varphi) = \sup\limits_{\mathbf{b} \in B} \varphi^N(\mathbf{Y}', \mathbf{b})$, где $\mathbf{Y}'$ — заданное выборочное значение $\mathbf{Y}$.

В частности, если $\varphi^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) = f^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$, то оценка будет правдоподобной. Известно, что асимптотически несмещенные оценки максимального правдоподобия при выполнении условия ([3], с. 123) всегда имеют место, однако чтобы квазиправдоподобная оценка была асимптотически несмещенной относительно $f^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$, накладываются ограничения на $\varphi^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$: если для всех y $\varphi(y, \mathbf{b})$ — гладкая функция по $\mathbf{b}$, то при каждом $\mathbf{b} \in B$

$$E\left(\frac{1}{N}\frac{\partial \ln \varphi^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right)\Bigg/_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_0} = 0, \quad j = \overline{1, p}. \tag{1}$$

Ясно, что асимптотическая эффективность квазиправдоподобных оценок в общем случае $\operatorname{leff} \beta_\varphi / \mathbf{b}_0 \ll 1$.

При определенных ограничениях на φ ([3], с. 144) можно получить сколь угодное количество состоятельных квазиправдоподобных оценок с разной асимптотической эффективностью.

Определение 2. Любая линейная комбинация конечного числа квазиправдоподобных оценок $\boldsymbol{\beta}_{\varphi_l}$ $(l = \overline{1, k})$ относительно разных φ_l с определенными весами называется линейно-комбинированной квазиправдоподобной оценкой (статистикой) $\boldsymbol{\beta}_k$.

Для последовательности квазиправдоподобных оценок $\boldsymbol{\beta}_{\varphi_1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{\varphi_k}$ применимо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть имеет место последовательность состоятельных, асимптотически несмещенных квазиправдоподобных оценок $\boldsymbol{\beta}_{\varphi_1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{\varphi_k}$. Тогда линейно-комбинированная оценка

$$\boldsymbol{\beta}_k = \left[\left\|\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \end{array}\right\| \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1} \left\|\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{1} \end{array}\right\|\right]^{-1} \left\|\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \end{array}\right\| \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1} \left\|\begin{array}{c} \boldsymbol{\beta}^{(1)}[\varphi_l] \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\beta}^{(p)}[\varphi_l] \end{array}\right\| \tag{2}$$

будет состоятельной, асимптотически несмещенной с асимптотической эффективностью $\operatorname{leff} \beta_{k-1}/\mathbf{b}_0 \leqslant \operatorname{leff} \beta_k/\mathbf{b}_0$, причем если $\boldsymbol{\beta}_{\varphi_s} \equiv \boldsymbol{\beta}_f$ $(s = 1, k)$, то $\boldsymbol{\beta}_k \equiv \boldsymbol{\beta}_f$ и $\operatorname{leff} \boldsymbol{\beta}_k/\mathbf{b}_0 = 1$, где

$$\boldsymbol{\beta}^{(j)}[\varphi_l] = \left\|\begin{array}{c} \beta^{(j)}_{\varphi_1} \\ \beta^{(j)}_{\varphi_2} \\ \vdots \\ \beta^{(j)}_{\varphi_k} \end{array}\right\|, \quad \boldsymbol{\Gamma}_p = \left\|\begin{array}{c|c|c|c} \operatorname{cov}(\beta^{(1)}_{\varphi_l}, \beta^{(1)}_{\varphi_s}) & \operatorname{cov}(\beta^{(1)}_{\varphi_l}, \beta^{(2)}_{\varphi_s}) & \ldots & \operatorname{cov}(\beta^{(1)}_{\varphi_l}, \beta^{(p)}_{\varphi_s}) \\ \hline \operatorname{cov}(\beta^{(2)}_{\varphi_l}, \beta^{(1)}_{\varphi_s}) & \operatorname{cov}(\beta^{(2)}_{\varphi_l}, \beta^{(2)}_{\varphi_s}) & \ldots & \operatorname{cov}(\beta^{(2)}_{\varphi_l}, \beta^{(p)}_{\varphi_s}) \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \operatorname{cov}(\beta^{(p)}_{\varphi_l}, \beta^{(1)}_{\varphi_s}) & \operatorname{cov}(\beta^{(p)}_{\varphi_l}, \beta^{(2)}_{\varphi_s}) & \ldots & \operatorname{cov}(\beta^{(p)}_{\varphi_l}, \beta^{(p)}_{\varphi_s}) \end{array}\right\|,$$

Γ_p — ковариационная матрица квазиправдоподобных оценок $\boldsymbol{\beta}_{\varphi_l}$ (положительно определенная, невырожденная), порядок матрицы

$$\mathbf{1} : k \times 1; \quad \mathbf{0} : k \times 1; \quad \boldsymbol{\beta}^{(j)}[\varphi_l] : k \times 1.$$

Следствие. Ковариационная матрица линейно-комбинированных оценок вычисляется по формуле

$$\mathbf{D}[\boldsymbol{\beta}_k] = \left[\left\|\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \end{array}\right\| \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1} \left\|\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{1} \end{array}\right\|\right]^{-1} \tag{3}$$

(т — знак транспонирования).

Доказательство утверждения. Задачу получения линейно-комбинированной оценки можно свести к нахождению оценки вектора математического ожидания многомерного временного ряда по многомерной выборке (k наблюдений) $\boldsymbol{\beta}_{\varphi_l}$ с одним и тем же математическим ожиданием и определенной ковариационной матрицей $\mathbf{\Gamma}_p$ обобщенным методом наименьших квадратов, так как имеет место следующая статистическая модель:

$$\left\|\begin{array}{c}\boldsymbol{\beta}^{(1)}\\ \hline \\ \hline \boldsymbol{\beta}^{(p)}\end{array}\vdots\begin{array}{c}[\varphi_l]\\ \hline \\ \hline [\varphi_l]\end{array}\right\| = \mathbf{z}\boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{z} = \left\|\begin{array}{c|c|c|c}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0}\\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{1}\end{array}\right\|,$$

где математическое ожидание $\boldsymbol{\varepsilon}$ равно нулю ввиду несмещенности $\beta_{\varphi_l}^{(j)}$, а ковариационная матрица равна $\mathbf{\Gamma}_p$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — случайный вектор размерностью $kp\times 1$. Для доказательства следствия достаточно применить аналогичное следствие из обобщенного метода наименьших квадратов. После применения формальной вычислительной процедуры обобщенного метода наименьших квадратов докажем основные свойства полученных линейно-комбинированных оценок (в том числе такие, как состоятельность, значение меры эффективности $\boldsymbol{\beta}_k$ относительно уже числа наблюдений N), исходя из свойств составляющих их квазиправдоподобных оценок.

Для этого обозначим матрицу $\mathbf{\Gamma}_p^{-1}$ следующим образом:

$$\mathbf{\Gamma}_p^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c|c|c}\boldsymbol{\omega}^{11} & \boldsymbol{\omega}^{12} & \ldots & \boldsymbol{\omega}^{1p}\\ \hline \boldsymbol{\omega}^{21} & \boldsymbol{\omega}^{22} & \ldots & \boldsymbol{\omega}^{2p}\\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline \boldsymbol{\omega}^{p1} & \boldsymbol{\omega}^{p2} & \ldots & \boldsymbol{\omega}^{pp}\end{array}\right\|,$$

где матрицы $\boldsymbol{\omega}^{jm}$ имеют размерность $k\times k$, $j, m = \overline{1, p}$. Тогда

$$\left\|\begin{array}{c|c|c|c}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\end{array}\right\| \mathbf{\Gamma}_p^{-1} \left\|\begin{array}{c|c|c|c}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \ldots & \mathbf{0}\\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{1}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cccc}\sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{11} & \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{12} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{1p}\\ \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{21} & \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{22} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{p1} & \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{p2} & \ldots & \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\omega_{ls}^{pp}\end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{c|c|c|c}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \ldots & \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\end{array}\right\| \mathbf{\Gamma}_p^{-1} \left\|\begin{array}{c}\boldsymbol{\beta}^{(1)}[\varphi_l]\\ \hline \boldsymbol{\beta}^{(2)}[\varphi_l]\\ \hline \vdots\\ \hline \boldsymbol{\beta}^{(p)}[\varphi_l]\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c}\sum\limits_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(1)}\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{11}\right) + \ldots + \sum\limits_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(p)}\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{1p}\right)\\ \sum\limits_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(1)}\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{21}\right) + \ldots + \sum\limits_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(p)}\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{2p}\right)\\ \vdots \\ \sum\limits_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(1)}\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{p1}\right) + \ldots + \sum\limits_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(p)}\left(\sum\limits_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{pp}\right)\end{array}\right\|.$$

Обозначая через A_{jm} и Δ соответственно алгебраические дополнения и определитель матрицы $\mathbf{D}^{-1}[\boldsymbol{\beta}_k]$, можем записать

$$\beta_k^{(j)} = \frac{A_{j1}}{\Delta}\left\{\sum_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(1)}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{11}\right) + \ldots + \sum_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(p)}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{1p}\right)\right\} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_{jp}}{\Delta}\left\{\sum_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(1)}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{p1}\right) + \ldots + \sum_{s=1}^{k}\beta_{\varphi_s}^{(p)}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{pp}\right)\right\}, \qquad (4)$$

причем после несложных преобразований

$$\beta_k^{(j)} = \sum_{s=1}^{k} t_{js}^{(j)}\beta_{\varphi_s}^{(j)} + \sum_{s=1}^{k} t_{1s}^{(j)}\beta_{\varphi_s}^{(1)} + \ldots + \sum_{s=1}^{k} t_{ps}^{(j)}\beta_{\varphi_s}^{(p)}.$$

Для $\sum_{s=1}^{k} t_{js}^{(j)}\beta_{\varphi_s}^{(j)}$ из (4) можно получить

$$\left[\frac{A_{j1}}{\Delta}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{l1}^{1j}\right) + \ldots + \frac{A_{jp}}{\Delta}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{l1}^{pj}\right)\right]\beta_{\varphi_1}^{(j)} + \ldots + \left[\frac{A_{j1}}{\Delta}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{lk}^{1j}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{A_{jp}}{\Delta}\left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{lk}^{pj}\right)\right]\beta_{\varphi_k}^{(j)}. \qquad (5)$$

Условием несмещенности является выполнение соотношений

$$\sum_{s=1}^{k} t_{js}^{(j)} = 1; \quad \sum_{s=1}^{k} t_{1s}^{(j)} = 0; \ldots; \quad \sum_{s=1}^{k} t_{ps}^{(j)} = 0. \qquad (6)$$

Из анализа (5) вытекает, что $\sum_{s=1}^{k} t_{js}^{(j)} = 1$, так как числитель представляет собой разложение детерминанта Δ по $(m=j)$-му столбцу, сумма же остальных весовых коэффициентов в $\beta_k^{(j)}$, соответствующая остальным составляющим $\beta_{\varphi_s}^{(c)}$, $c \neq j$, $c = \overline{1, p}$, равна 0, так как представляет собой произведение алгебраических дополнений $(m=j)$-го столбца на другие столбцы.

Что касается состоятельности, то из-за присутствия в линейно-комбинированной оценке состоятельных компонентов и выполнения равенства (6) линейно-комбинированная оценка также будет состоятельной ([4], с. 282).

Докажем асимптотические свойства (при $N \to \infty$) ковариационной матрицы комбинированных оценок. Как известно [4], мерой эффективности любой оценки относительно оценки максимального правдоподобия является отношение определителей ковариационных матриц оценок максимального правдоподобия и исследуемой оценки. Поскольку очевидно, что $\det \mathbf{D}[\beta_{k-1}] \geqslant \det \mathbf{D}[\beta_k]$, то $\mathrm{leff}\, \beta_k/\mathbf{b}_0 \geqslant \mathrm{leff}\, \beta_{k-1}/\mathbf{b}_0$.

Ковариационная матрица для двух квазиправдоподобных оценок имеет вид [3]

$$\mathbf{cov}\left(\beta_{\varphi_s}, \beta_{\varphi_l}\right) = \frac{1}{N}\mathbf{R}_s^{-1}(\mathbf{b}_0)\,\mathbf{M}_{sl}(\mathbf{b}_0)\,\mathbf{R}_l^{-1}(\mathbf{b}_0), \qquad (7)$$

где $\mathbf{R}_s(\mathbf{b}) = -E\{\mathbf{L}_s(\mathbf{Y}, \mathbf{b})\}$ положительно определена;

$$\mathbf{M}_{sl}(\mathbf{b}) = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{K}_s(y_i, b)\,\mathbf{K}_l^{\mathrm{T}}(y_i, b)\right\},$$

причем

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{K}_s(y_i, \mathbf{b}) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \ln \varphi_s(y_i, b)}{\partial b^{(j)}}\right],$$
$$\mathbf{L}_s(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_s(y_i, \mathbf{b}) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 \ln \varphi_s(y_i, b)}{\partial b^{(j)}\partial b^{(m)}}\right]. \qquad (8)$$

Если же оценка правдоподобная, то $\mathbf{R}(\mathbf{b}_0) = \mathbf{M}(\mathbf{b}_0)$ и $\mathbf{cov}(\beta_f) = (1/N)\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b}_0)$.

Теперь покажем, что при наличии в последовательности $\{\beta_{\varphi_l}\}$ эффективной оценки $\beta_{\varphi_s} = \beta_f$

$$\mathbf{cov}\left(\beta_{\varphi_s}, \beta_{\varphi_l}\right) = \mathbf{cov}\left(\beta_{\varphi_l}, \beta_{\varphi_s}\right) = \mathbf{cov}\,\beta_{\varphi_s} = \frac{1}{N}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b}_0).$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся условием (1) несмещенности квазиправдоподобных оценок в следующей форме ($l \neq s$):

$$E\{\mathbf{K}_l(\mathbf{Y}, \mathbf{b})\} = \mathbf{0}$$

при каждом $\mathbf{b} \in B$. Продифференцировав это выражение по $\mathbf{b}$ и применив обозначения (8), получим (дифференцирование по параметру $\mathbf{b}$ возможно согласно условиям ([3], с. 144))

$$-E\{\mathbf{L}_l(\mathbf{Y}, \mathbf{b})\}/_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_0} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial \ln \varphi_l(y_i, b)}{\partial b^{(j)}}\right|\left|\frac{\partial \ln f(y_i, b)}{\partial b^{(j)}}\right|^{\mathrm{T}}\right\}\Bigg/_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_0},$$

т. е. $\mathbf{R}_l(\mathbf{b}_0) = \mathbf{M}_{ls}(\mathbf{b}_0)$; тогда из (7) следует

$$\operatorname{cov}(\boldsymbol{\beta}_{\varphi_s}, \boldsymbol{\beta}_{\varphi_l}) = \operatorname{cov}(\boldsymbol{\beta}_{\varphi_l}, \boldsymbol{\beta}_{\varphi_s}) = \frac{1}{N}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{b}_0).$$

В этом случае ковариационная матрица $\boldsymbol{\Gamma}_p$ имеет, как это легко проверить, такую структуру: в каждом блоке s-я строка и s-й столбец будут с одинаковыми элементами. Исследуем свойства таких матриц. Пусть имеется блочная матрица вида

$$\boldsymbol{\Gamma}_p = \begin{vmatrix} \mathbf{V}^{11} & \dots & \mathbf{V}^{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{V}^{p1} & \dots & \mathbf{V}^{pp} \end{vmatrix},$$

и пусть в каждом блоке s-я строка и s-й столбец имеют одинаковые элементы $\left(v_{ss}^{11}, \dots, v_{ss}^{pp}\right)$. В этом случае применима система тождеств

$$\sum_{i=1}^{k} v_{ls}^{1m} v_{l\nu}^{1m} + \dots + \sum_{l=1}^{k} v_{ls}^{pm} v_{l\nu}^{pm} = 0 \quad (s \neq \nu),\ m = \overline{1, p},$$

где v_{ss}^{11} — алгебраическое дополнение относительно ν-го столбца в матрице $\mathbf{V}^{jm}$, или

$$v_{ss}^{1m}\sum_{l=1}^{k} v_{l\nu}^{1m} + \dots + v_{ss}^{pm}\sum_{l=1}^{k} v_{l\nu}^{pm} = 0.$$

Так как матрица

$$\begin{vmatrix} v_{ss}^{11} & \dots & v_{ss}^{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{ss}^{1p} & \dots & v_{ss}^{pp} \end{vmatrix}$$

невырожденная ([5], с. 455), то

$$\sum_{l=1}^{k} v_{l\nu}^{1m} = \dots = \sum_{l=1}^{k} v_{l\nu}^{pm} = 0.$$

Отсюда вытекает, что сумма элементов столбцов, исключая s-й, обратной матрицы $\boldsymbol{\Gamma}_p^{-1}$ равна нулю, поэтому

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \dots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \dots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \dots & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{11} & \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{12} & \dots & \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{1p} \\ \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{21} & \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{22} & \dots & \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{p1} & \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{p2} & \dots & \sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{pp} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \dots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} & \dots & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & \dots & \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta}^{(1)}[\varphi_l] \\ \boldsymbol{\beta}^{(2)}[\varphi_l] \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}^{(p)}[\varphi_l] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{11}\right)\beta_{\varphi_s}^{(1)} + \dots + \left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{1p}\right)\beta_{\varphi_s}^{(p)} \\ \left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{21}\right)\beta_{\varphi_s}^{(1)} + \dots + \left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{2p}\right)\beta_{\varphi_s}^{(p)} \\ \vdots \\ \left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{p1}\right)\beta_{\varphi_s}^{(1)} + \dots + \left(\sum_{l=1}^{k}\omega_{ls}^{pp}\right)\beta_{\varphi_s}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Из анализа выражения (9) видно, что в этом случае в состав комбинированной оценки входят только эффективные оценки β_{φ_s}, т. е. линейно-комбинированная оценка тождественна правдоподобной оценке с leff $\beta_k/b_0 = 1$. Теорема доказана.

Приведенные выше свойства линейно-комбинированных оценок сохраняются и для оценок ковариационной матрицы $\widehat{\Gamma}_p$, если только оценка $\widehat{\Gamma}_p$ определена с достаточной точностью ([6], с. 209).

Одним из возможных примеров такой последовательности $\{\varphi_l\}$ является последовательность квазиправдоподобных оценок, соответствующая l-обобщенному нормальному закону

$$\varphi_l(y, \lambda, l) = \frac{1}{2\left(2\lambda_l^2\right)^{1/l}\Gamma((l+1)/l)} \exp\left\{-\frac{|y-\eta(\mathbf{x}, \mathbf{b})|^l}{2\lambda_l^2}\right\},$$

где $\Gamma((l+1)/l)$ — гамма-функция; $2\lambda_l^2$ — величина, являющаяся функцией дисперсии; l — любое положительное число (при $l=1$ — закон Лапласа, при $l=2$ — закон Гаусса). В качестве формальных критериев для получения квазиправдоподобных оценок примем последовательно $\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{(2\lambda_1^2)_i}|y_i - \eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{b})|, \ldots,$ что соответствует методу наименьших модулей, наименьших квадратов и т. д., так как логарифмическая функция квазиправдоподобия для этих законов имеет вид

$$\ln\varphi_l^N(\mathbf{Y}, \lambda, l) = \ln\frac{1}{[2\Gamma((l+1)/l)]^N\left[\prod\limits_{i=1}^{N}(2\lambda_l^2)_i^{1/l}\right]} - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(2\lambda_l^2)_i}|y_i - \eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{b})|^l. \tag{10}$$

При нахождении квазиправдоподобных оценок в случае, когда l нечетное, производные первого и второго порядков $\varphi_l^N(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$ по $\mathbf{b}$ не существуют, по крайней мере, в одной точке. Однако, во-первых, имеется доказательство состоятельности квазиправдоподобных оценок ([3], с. 155), не требующее существования уравнений квазиправдоподобия; во-вторых, что касается ковариационной матрицы Γ_p, то при нахождении первых и вторых производных можно произвести формальное дифференцирование с помощью функций $\operatorname{sign} y$, $\delta(y)$ ([7], с. 138). Наконец, можно получить те же результаты, если воспользоваться понятием информационного уклонения, не прибегая к использованию неаналитических функций ([3], с. 160).

Пример. Для модели $y_i = \eta(x_i, b_0) + \xi_i$ в качестве истинного распределения примем

$$f(y_i, b) = \frac{2}{\mu\Gamma(1/4)}\exp\left\{-\frac{|y_i - \eta(x_i, b)|^4}{(\mu)^4}\right\}, \quad (\mu)^4 = 2\lambda_4^2,$$

β_k	β_1	β_2	β_3	МП-оценка
$D[\beta_k]$	$0{,}82 \times \dfrac{\mu^2}{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\eta(x_i, b)}{\partial b}\right)^2\Big/b_0}$	$0{,}304 \times \dfrac{\mu^2}{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\eta(x_i, b)}{\partial b}\right)^2\Big/b_0}$	$0{,}260 \times \dfrac{\mu^2}{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\eta(x_i, b)}{\partial b}\right)^2\Big/b_0}$	$0{,}245 \times \dfrac{\mu^2}{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\eta(x_i, b)}{\partial b}\right)^2\Big/b_0}$
leff β_k/b_0	0,31	0,83	0,94	1

а в качестве квазиправдоподобных оценок — оценки, соответствующие $l=1$, 2, 3. Далее, применив выражения (10), (7), (2) и (3), можно найти дисперсии $D[\beta_1]$; $D[\beta_2]$; $D[\beta_3]$ и сравнить значения этих дисперсий с дисперсией оценки максимального правдоподобия, определив тем самым асимптотические эффективности линейно-комбинированных оценок относительно оценки максимального правдоподобия при $l=1$, 2, 3. Полученные результаты приведены в таблице. Анализ результатов показывает, что, во-первых, асимптотическая эффективность линейно-комбинированных оценок значительно возрастает по сравнению с асимптотической эффективностью отдельных квазиправдоподобных оценок, во-вторых, эта асимптотическая эффективность монотонно увеличивается с увеличением числа квазиправдоподобных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента.— М.: Наука, 1971.
2. **Jenrich R. I.** Asymptotic properties of nonlinear least squares estimators.— Ann. Math. Stat., 1969, vol. 40, p. 633.
3. **Мудров В. И., Кушко В. Л.** Методы обработки измерений.— М.: Сов. радио, 1976.
4. **Крамер Г.** Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.
5. **Андерсон Т.** Введение в многомерный статистический анализ.— М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
6. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М.: Связь, 1976, вып. 6.
7. **Вапник В. Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным.— М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 11 февраля 1981 г.;
окончательный вариант — 6 июля 1983 г.

УДК 621.396.1

Е. Л. КУЛЕШОВ

(Владивосток)

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ С ВЫСОКИМ РАЗРЕШЕНИЕМ

Одним из важнейших методов исследования случайных процессов и полей является спектральный анализ. В приложениях часто возникает необходимость оценивать спектральную плотность случайного процесса по конечному ансамблю коротких реализаций. Широкий класс таких задач появляется при исследовании случайных полей, если результаты измерений представлены набором одномерных сечений. Например, подобные задачи встречаются в океанологии [1] при изучении турбулентности гидрофизических параметров, в спектральном анализе случайных процессов, если применяется метод Бартлетта [2], в соответствии с которым исходная реализация процесса разбивается на множество коротких реализаций и спектральная оценка получается усреднением по их множеству.

Задачи такого типа имеют особенности, которые не отражены в литературе по спектральному анализу [2, 3]. Во-первых, ковариационные свойства конечного преобразования Фурье и периодограмм исследованы в асимптотике при $\tau_0/T\to 0$ (τ_0 — интервал корреляции, T — длительность реализации) [3]. Для коротких реализаций могут оказаться существенными величины порядка τ_0/T, поэтому представляется важным нахождение точных корреляционных соотношений. Во-вторых, спектральная оценка, полученная усреднением периодограмм по множеству коротких реализаций, как правило, имеет существенное смещение и, следова-