Первое, четвертое, пятое и восьмое слагаемые в (21) при $\tau < t$ тождественно равны нулю. Из (21) с учетом (16) имеем

$$3e^{+2t}K(1, t) - e^{-1t}K(-1, t) = e^{+2t} - e^{-1t},$$
$$e^{-2t}K(1, t) - 3e^{-1t}K(-1, t) = 3e^{-2t} - 3e^{-1t}, \qquad (22)$$

из (22) —

$$K(1, t) = (-3e^{1t} + 3e^{-3t})/(-9e^{+t} + e^{-3t}); \ K(-1, t) =$$
$$= (8 - 9e^{t} + e^{-3t})/(-9e^{+t} + e^{-3t}). \qquad (23)$$

При $t \to \infty$ $K(1, t) = 1/3$, $K(-1, t) = 1$, что совпадает со значениями этих параметров в установившемся режиме $K(s) = 1/(2+s)$. При $t = 0$ $K(1, t) = 0$, $K(-1, t) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солодов А. В., Петров Ф. С.** Линейные автоматические системы с переменными параметрами.— М.: Наука, 1971.
2. **Росин М. Ф., Булыгин В. С.** Статистическая динамика и теория эффективности систем управления.— М.: Машиностроение, 1981.
3. **Зотов М. Г.** Решение интегральных уравнений Винера — Хопфа и Заде — Рагаццини операционным методом.— Автометрия, 1972, № 1.
4. **Зотов М. Г.** Об одном способе определения неизвестных параметров при решении интегральных уравнений операционным методом.— Автометрия, 1975, № 4.

Поступило в редакцию 4 ноября 1982 г.

УДК 621.396.1

Е. Л. КУЛЕШОВ

(Владивосток)

ОЦЕНИВАНИЕ ИНТЕРВАЛА КОРРЕЛЯЦИИ

Интервал корреляции (ИК) — одна из важнейших числовых характеристик стационарного случайного процесса. Известны различные определения ИК [1, 2]. В прикладных исследованиях оценивание ИК может иметь и самостоятельный интерес, но чаще оценка интервала корреляции применяется в последующем корреляционно-спектральном анализе, поскольку знание ИК позволяет достаточно точно выбрать ширину сглаживающего окна [3] и получить оценку ковариационной функции или спектральной плотности случайного процесса, близкую к оценке с минимальной среднеквадратической ошибкой. Исследование свойств оценок ИК является достаточно сложным вопросом, не нашедшим пока должного освещения в литературе.

Наиболее распространено определение ИК τ_0 в интегральной форме: $\tau_0 = \int_0^\infty |B(\tau)|\,d\tau$, $B(\tau)$ — ковариационная функция стационарного случайного процесса $x(t)$ с единичной дисперсией. Если $[t_0, t_0 + T]$ — интервал наблюдения процесса $x(t)$ и $\beta_0(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)\,x(t+|\tau|)\,dt/T$, $|\tau| \leqslant T$ — несглаженная оценка ковариационной функции, то соответствующая оценка ИК $T_0 = \int_0^T |\beta_0(\tau)|\,d\tau$. Среднеквадратическая ошибка такой оценки не уменьшается при $T \to \infty$. Это легко показать для неотрицательной ковариационной функции. При этом имеет смысл представить оценку ИК в виде

$$T_0 = \int_0^T \beta_0(\tau)\,d\tau = 0{,}5 f_0(0),$$

где $f_0(\omega)$ — несглаженная спектральная оценка (преобразование Фурье от функции β_0). Пусть M — операция математического ожидания, $F(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса $x(t)$, тогда [3] $\lim_{T\to\infty} Mf_0(0) = F(0)$ и $\lim_{T\to\infty} \operatorname{var} f_0(0) = 2F^2(0)$. Таким образом, среднеквадратическая ошибка оценки T_0 при $T \to \infty$ не уменьшается.

Так как $f_0(0) \geqslant 0$, то $\int\limits_0^T \beta_0(\tau)\, d\tau \leqslant \int\limits_0^T |\beta_0(\tau)|\, d\tau$, так что оценка T_0 с модулем возможно будет иметь расходимость среднеквадратической ошибки при $T \to \infty$. Такие свойства оценки T_0 были отмечены в [2] на примере процесса с экспоненциальной ковариационной функцией. Там же предполагается другой подход к оцениванию ИК, основанный на проверке статистических гипотез. Однако при таком подходе процедура оценивания чересчур сложна и имеет ряд отрицательных моментов: интуитивный характер выбора критического уровня и уровня значимости. Кроме того, остается неопределенной вероятность ошибки второго рода, поэтому уровень значимости нельзя выбирать слишком малым.

Наш подход основан на применении сглаживающих окон. На целесообразность этого указывает пример для процесса с ковариационной функцией $B(\tau) \geqslant 0$. Пусть $H_T(\tau)$ — корреляционное окно, тогда оценка ИК

$$T_1 = \int\limits_0^T H_T(\tau)\, \beta_0(\tau)\, d\tau = 0{,}5 f(0),$$

где $f(\omega)$ — сглаженная спектральная оценка [3]. Подходящим выбором окна H_T обеспечивается $\lim\limits_{T\to\infty} M\,(f(\omega) - F(\omega))^2 = 0$, и при этом $\lim\limits_{T\to\infty} M\,(T_1 - \tau_0)^2 = 0$. Общий случай произвольной функции $B(\tau)$ исследовать затруднительно, поэтому далее рассмотрим оценку ИК

$$T_2 = \int\limits_0^T H_T^2(\tau)\, \beta_0^2(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

которая соответствует теоретической величине $\tau_2 = \int\limits_0^\infty B^2(\tau)\, d\tau$. Покажем, что такая оценка при некоторых ограничениях на спектральную плотность и подходящем выборе окна H_T $\lim\limits_{T\to\infty} M\,(\tau_2 - T_2)^2 = 0$.

Пусть спектральное окно $h_T(\omega)$ (фурье-образ функции H_T) удовлетворяет условиям

$$h_T(\omega) = h\,(\omega/B_T)/B_T, \quad \lim_{T\to\infty} h_T(\omega) = \delta(\omega), \tag{2}$$

$$\lim_{T\to\infty} B_T = 0, \quad \lim_{T\to\infty} TB_T = \infty, \tag{3}$$

где B_T — эффективная ширина спектрального окна; h — функция, не зависящая от T. Такой класс окон рассматривался Парзеном [4]. Из соотношения (1) по теореме Парсеваля

$$T_2 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\omega)\, d\omega. \tag{4}$$

Отсюда $MT_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{var} f(\omega) + (Mf(\omega))^2)\, d\omega$. Поскольку при условиях (2), (3) $\lim\limits_{T\to\infty} Mf(\omega) = F(\omega)$ и $\lim\limits_{T\to\infty} \operatorname{var} f(\omega) = 0$, то $\lim\limits_{T\to\infty} MT_2 = \tau_2$, т. е. оценка (4) асимптотически несмещенная.

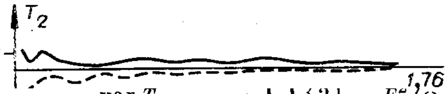
Осталось показать, что $\lim\limits_{T\to\infty} \operatorname{var} T_2 = 0$. Из (4) следует, что

$$\operatorname{var} T_2 = \int\int \operatorname{cov}\left[f^2(\omega_1), f^2(\omega_2)\right] d\omega_1 d\omega_2/(4\pi)^2. \tag{5}$$

Для гауссовых случайных величин $x_1, \ldots, x_4$ со средними $a_1, \ldots, a_4$ справедливо соотношение [1]

$$\operatorname{cov}(x_1x_2,\ x_3x_4) = Mx_1x_3Mx_2x_4 + Mx_1x_4Mx_2x_3 - 2a_1 \ldots a_4. \tag{6}$$

При условии (2), (3) для больших T ширина спектрального окна существенно больше интервала корреляции несглаженной спектральной оценки, который $\sim 1/T$ [5], поэтому сглаженная спектральная оценка при $T \to \infty$ распределена нормально. Аналогичная ситуация имеет место для случайного процесса на выходе линейной систе-



мы [1]. Теперь, подставляя в (6) соотношение $Mx_1x_2 = \mathrm{cov}\,(x_1,\ x_2) + a_1a_2$, находим $\mathrm{cov}\,[f^2(\omega_1), f^2(\omega_2)] = 2[\mathrm{cov}\, f(\omega_1),\ f(\omega_2)]^2 +$

$$\mathrm{var}\, T_2 = \frac{1}{(4\pi)^2}\int\int\Big\{2\Big[\frac{2\pi}{T} F^2(\omega_1)\left(h_T(\omega_2+\omega_1) + h_T(\omega_2-\omega_1)\right)\Big]^2 +$$

$$+ 4F(\omega_1)F(\omega_2)\left[\frac{2\pi}{T} F^2(\omega_1)\left(h_T(\omega_2+\omega_1) + h_T(\omega_2-\omega_1)\right)\right]\Big\} d\omega_1 d\omega_2. \qquad (8)$$

Используя (2), (3), при большом T получаем $\mathrm{var}\, T_2 = h(0)/\left(B_T T^2\right) \int F^4(\omega)\, d\omega + \int F^4(\omega)\, d\omega/(\pi T) + F^4(0)/(2T)$. Отсюда $\lim\limits_{T\to\infty} \mathrm{var}\, T_2 = 0$, если $\int F^4(\omega)\, d\omega < \infty$ и $F^4(0) < \infty$. Таким образом, при этих ограничениях на спектральную плотность применение сглаживающего окна, удовлетворяющего условиям (2), (3), обеспечивает сходимость в среднеквадратическом оценки T_2 ИК к истинному значению τ_2.

Приведем результаты оценивания ИК для процесса авторегрессии $x(t) = \gamma x(t-1) - \gamma^2 x(t-2) + n(t)$, где $\gamma = 0{,}8$ и $n(t)$ — последовательность, генерируемая датчиком случайных чисел. Ковариационная функция такого процесса определяется известным соотношением [3], а ИК — $\tau_0 = 3{,}56$ и $\tau_2 = 1{,}76$. На рисунке представлены результаты вычисления T_2 для двух различных реализаций процесса $x(t)$ в зависимости от длины реализации T, которая изменяется от 30 до 1500 с шагом 30. Применялось прямоугольное корреляционное окно шириной $\sim \sqrt{T}$. Результаты моделирования для различных значений параметра γ дают основания полагать, что оценка T_0 расходится, по крайней мере для $T \sim 10^3$ отношение T_0/τ_0 достигало 5—7. Оценка T_2 с применением сглаживающих окон обладает устойчивостью и неплохой точностью даже на сравнительно коротких реализациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1974, т. 1.
2. **Жовинский А. Н.** Оценивание интервала корреляции с позиции теории проверки гипотез.— Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, вып. 9.
3. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1971, вып. 1.
4. **Parzen E.** On consistent estimates spectrum of stationary time series.— The Annals of Mathematical Statistics, 1957, vol. 28, N 2.
5. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1972, вып. 2.

Поступило в редакцию 17 марта 1983 г.

УДК 621.37 : 621.391.519.27

В. В. КУРИЛКИН

(Люберцы Московской)

О ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ СМЕСИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА С УЗКОПОЛОСНЫМ НОРМАЛЬНЫМ ШУМОМ

При решении ряда практических задач часто возникает необходимость расчета статистических характеристик огибающей * и ее производной аддитивной смеси $\xi(t)$ квазигармонического сигнала и узкополосного нормального шума [1], в частности плотности вероятности огибающей этой смеси. Однако использование в соответствующих выкладках известного соотношения из [1] в некоторых случаях затруднительно ввиду его относительной сложности.

---

* Под термином «огибающая смеси» здесь и далее понимается комплексная огибающая узкополосного случайного процесса $\xi(t)$.