А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 6 1983

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.2

В. С. КИРИЧУК
(Новосибирск)

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ФРАГМЕНТА

1. Рассмотрим задачу поиска заданного фрагмента $T(X)$ по некоторому изображению $Q(X)$, включающему в себя $T(X)$. Пусть изображение $Q(X)$ представимо в виде

$$Q(X) = V(X) + \xi(X), \quad X \in \Omega.$$

Здесь X — вектор координат; $\xi(X)$ — шум, сопровождающий измерения $\xi(X) \in N(0, \sigma_q^2)$; Ω — область задания исходного изображения. Фрагмент

$$T(X) = F\{V(X+\delta)\} + \eta(X), \quad X \in \Omega_t, \quad \eta(X) \in N(0, \sigma_t^2),$$

где $\delta(X)$ — смещение; Ω_t — область существования фрагмента. Необходимо определить смещение δ при условии, что функция амплитудного преобразования F известна с точностью до вектора параметров: $F\{V\} = F\{\Theta, V\}$.

Данная задача рассматривалась, например, в [1, 2], где для ее решения применялись различные методы. В настоящей работе оценка смещения проводится с использованием метода максимального правдоподобия, что обеспечивает асимптотическую эффективность оценки.

2. Совместное распределение $Q(X)$ и $T(X)$ имеет вид

$$L = Ce^{-\frac{1}{2}\left\{\sum\limits_{\Omega}\{Q(X)-V(X)\}^2/\sigma_q^2+\sum\limits_{\Omega_t}\{T(X)-F[\Theta,V(X+\delta)]\}^2/\sigma_t^2\right\}},$$

и, следовательно, метод максимального правдоподобия (ММП) приводит к минимизации функционала

$$I\{\Theta, V(X), \delta\} = \sum_{\Omega}\{Q(X) - V(X)\}^2/\sigma_q^2 2 + \sum_{\Omega_t}\{T(X) - F[\Theta, V(X+\delta)]\}^2/2\sigma_t^2 \quad (1)$$

по параметрам $V(X)$, Θ, δ.

Оценки параметров $V(X)$ и Θ находим из уравнений правдоподобия:

$$\frac{\partial I}{\partial V(X)} = -\frac{1}{\sigma_q^2}\{Q(X) - V(X)\} = 0, \quad X \in \Omega \setminus \Omega_t;$$

$$\frac{\partial I}{\partial V(X+\delta)} = -\frac{1}{\sigma_q^2}\{Q(X+\delta) - V(X+\delta)\} - \frac{1}{\sigma_t^2}\{T(X) - F[\Theta, V(X+\delta)]\}F'_V = 0,$$
$$X \in \Omega_t; \quad (2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \Theta} = -\frac{1}{\sigma_t^2}\sum_{\Omega_t}\{T(X) - F[\Theta, V(X+\delta)]\}F'_\Theta = 0, \quad X \in \Omega_t.$$

Подставив в $I\{\Theta, V(X), \delta\}$ значения оценок $\widehat{\Theta}$, $\widehat{V}(X)$, найденные из (2), сводим задачу поиска фрагмента к нахождению минимума функционала

$$I^*(\delta) = I\{\widehat{\Theta}, \widehat{V}(X), \delta\}$$

по вектору параметров δ.

3. В практически важном случае, когда амплитудное преобразование линейно, т. е. $F\{\Theta, V(X+\delta)\} = \Theta_0 + \Theta V(X+\delta)$, оценки равны:

$$\widehat{V}(X) = Q(X), \quad X \in \Omega \setminus \Omega_t;$$

$$\widehat{V}(X+\delta) = \{\sigma_t^2 Q(X+\delta) + \Theta\sigma_q^2 T(X)\}/\{\sigma_t^2 + \Theta^2\sigma_q^2\}, \quad X \in \Omega_t. \quad (3)$$

Тогда $\widehat{\Theta}_0 = \bar{T} - \Theta\bar{Q}$ ($\bar{T}$, $\bar{Q}$ — средние значения статистик $T(X)$, $Q(X)$). Масштабный множитель Θ определяется из квадратного уравнения:

$$\Theta^2 \langle \mathring{T}\mathring{Q} \rangle/\sigma_t^2 + \Theta \left\{\langle \mathring{Q}\mathring{Q} \rangle/\sigma_q^2 - \langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle/\sigma_t^2\right\} - \langle \mathring{Q}\mathring{T} \rangle/\sigma_q^2 = 0, \tag{4}$$

где $\mathring{T}(x) = T(x) - \bar{T}$, $\mathring{Q}(x) = Q(x) - \bar{Q}$, $\langle\rangle$ — знак скалярного произведения.

Подставив значения оценок в функционал I, получаем, что для поиска координат объекта необходимо определить минимум функционала

$$\begin{gathered} I^*(\delta) = \sum_{\Omega_t} \{\mathring{Q}(X+\delta)\Theta - \mathring{T}(X)\}^2/(1+\Theta^2); \\ \Theta^2\langle \mathring{T}\mathring{Q} \rangle + \Theta\{\langle \mathring{Q}\mathring{Q} \rangle - \langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle\} - \langle \mathring{T}\mathring{Q} \rangle = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Б. Дисперсия шума фрагмента нулевая ($\sigma_t = 0$), тогда уравнение для Θ и $I^*(\delta)$ преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \Theta = \langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle / \langle \mathring{T}\mathring{Q} \rangle; \\ I^*(\delta) = \langle \mathring{Q}\mathring{Q} \rangle \langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle - \langle \mathring{Q}\mathring{T} \rangle^2. \end{gathered} \tag{7}$$

В. Дисперсия исходного изображения нулевая ($\sigma_q = 0$):

$$\Theta = \langle \mathring{Q}\mathring{T} \rangle / \langle \mathring{Q}\mathring{Q} \rangle, \quad I^*(\delta) = \langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle - \langle \mathring{Q}\mathring{T} \rangle^2 / \langle \mathring{Q}\mathring{Q} \rangle. \tag{8}$$

В этом случае поиск минимума I по δ эквивалентен поиску максимума квадрата (модуля) коэффициента корреляции $R^2 = \langle \mathring{Q}\mathring{T} \rangle^2 / \{\langle \mathring{Q}\mathring{Q} \rangle \langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle\}$ в силу того, что $\langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle$ не зависит от δ.

Г. Если значение масштабного множителя Θ известно, то функционал существенно упрощается:

$$I^* = \sum_{\Omega_t} \{\Theta\mathring{Q}(X+\delta) - \mathring{T}(X)\}^2 \text{ при наличии смещения } (\Theta_0 \neq 0) \tag{9}$$

и

$$I^* \sum_{\Omega_t} \{\Theta Q(X+\delta) - T(X)\}^2 \text{ при его отсутствии.} \tag{10}$$

5. Использование метода наименьших квадратов при поиске фрагмента приводит к минимизации функционала $I = \sum_{\Omega_t} \{\mathring{T}(X) - \Theta\mathring{Q}(X)\}^2$ по Θ и δ. Разрешая уравнение $\partial I/\partial\Theta = 0$, приходим к минимизации функционала

$$I^* = \langle \mathring{T}\mathring{T} \rangle - \langle \mathring{Q}\mathring{T} \rangle^2 / \langle \mathring{Q}\mathring{Q} \rangle,$$

и, следовательно, метод наименьших квадратов дает те же результаты, что и метод максимального правдоподобия, при условии, если $\sigma_q = 0$. В противном случае (т. е. если предположение $\sigma_q = 0$ является слишком грубым) предпочтительно пользоваться методом максимального правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982, т. 2.
2. **Надь.** Цифровая обработка изображений, полученных при дистанционном исследовании природных ресурсов.— В кн.: Распознавание образов при помощи цифровых вычислительных машин. М., 1974.

Поступило в редакцию 21 апреля 1983 г.