4. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
5. **Преображенский Н. Г., Седельников А. И., Чистый И. Л.** Об учете аппаратурных искажений в спектрах рассеяния Мандельштама — Бриллюэна.— Опт. и спектр., 1979, т. 49, вып. 1.
6. **Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Оптимизация спектроскопических измерений на основе методов регуляризации.— Журн. прикл. спектр., 1981, т. 35, вып. 4.

Поступила в редакцию 22 ноября 1982 г.;
окончательный вариант — 5 июля 1983 г.

УДК 519.6

А. С. ГОЛЬЦОВ

(Харьков)

ПРИМЕНЕНИЕ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Для решения обратных задач (ОЗ) широко применяется метод регуляризации Тихонова [1], основанный на изменении исходной некорректной математической постановки задачи формальным добавлением к минимизируемому функционалу некоторого стабилизирующего члена. Такой формальный прием не позволяет выяснить, каким образом изменяется при этом физическая постановка рассматриваемой задачи, что затрудняет выполнение анализа допустимости применения такого подхода, а также не дает возможности оценить точность получаемого приближенного решения. Все это сдерживает применение этого метода в практике решения ОЗ, где в последнее время все чаще стали отдавать предпочтение методам параметрической идентификации [2, 3], которые базируются на предварительной параметризации исходной задачи и учитывают стохастическую природу процесса получения экспериментальной информации. Кроме того, в этих методах максимально используется имеющаяся априорная информация, что позволяет производить оценку точности получаемого решения. Однако до настоящего времени еще не исследованы регуляризующие свойства алгоритмов оптимального оценивания [2, 4], лежащих в основе методов идентификации.

В настоящей работе показано, что выбор стабилизирующей добавки в методе регуляризации Тихонова с учетом априорных сведений об опорной траектории искомого решения сводит рассматриваемую обратную задачу к задаче оптимального оценивания состояния некоторой динамической системы. При этом оптимальное регуляризованное решение может быть найдено оптимальным оцениванием по методу максимума апостериорной вероятности.

Рассмотрена задача одновременного определения состояния $x(\tau)$ и входного воздействия $z(\tau)$ динамической системы

$$\frac{dx}{d\tau} = -ax + z(\tau) + bq(\tau) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

по измерениям сигналов $y(\tau)$ и $u(\tau)$ на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_N$ при $\tau_N \to \infty$, связанных с состоянием системы $x(\tau)$ и измеряемым входным воздействием $q(\tau)$ соотношениями

$$y(\tau) = hx(\tau) + v(\tau), \tag{3}$$

$$u(\tau) = \beta q(\tau) + \xi(\tau), \tag{4}$$

где $\xi(\tau)$ и $v(\tau)$ — случайные погрешности измерений, порождающие винеровские процессы $W_1(\tau)$ и $W_2(\tau)$. При этом

$$E\{\xi(\tau)v(\eta)\}=0,$$

где $\delta(\tau-\eta)$ — дельта-функция; $\sigma_\xi^2(\tau)$, $\sigma_v^2(\tau)$ — известные дисперсии погрешностей $\xi(\tau)$ и $v(\tau)$; $E\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания.

После замены $q(\tau)$ в (1) случайным процессом $u(\tau)$ в соответствии с выражением (4) уравнение (1) можно записать в виде стохастического дифференциального уравнения

$$dx=-axd\tau+z(\tau)d\tau+cu(\tau)d\tau+cdW_2(\tau), \tag{6}$$

где

$$c=b/\beta.$$

Будем искать регуляризованные решения для $x(\tau)$ и $z(\tau)$ минимизацией регуляризованного функционала

$$J(\alpha,\ x,\ z)=\int\limits_0^\infty \|y(\tau)-hx(\tau)\|^2 d\tau+\alpha\int\limits_0^\infty m_1^2(\tau)\left\|\frac{dx}{d\tau}-\frac{dx^*}{d\tau}\right\|^2 d\tau+$$
$$+\alpha\int\limits_0^\infty m_2^2(\tau)\left\|\frac{dz}{d\tau}-\frac{dz^*}{d\tau}\right\|^2 d\tau. \tag{7}$$

Здесь α — параметр регуляризации; $m_1^2(\tau)$ и $m_2^2(\tau)$ — весовые функции; $x^*(\tau)$ и $z^*(\tau)$ — опорные траектории.

В качестве опорной траектории $x^*(\tau)$ естественно принять математическое ожидание $\mu_x(\tau)$ случайного процесса $x(\tau)$, порождаемого системой (6). Как известно [4], $\mu_x(\tau)$ можно определить из решения детерминированного уравнения

$$\frac{d\mu_x}{d\tau}=a\mu_x+z(\tau)+c\mu_u(\tau), \tag{8}$$

где

$$\mu_u(\tau)\overset{\Delta}{=\!=}E\{u(\tau)\}=u(\tau).$$

Для выбора опорной траектории $z^*(\tau)$ нужна дополнительная априорная информация. Пусть известно, что опорная траектория $z^*(\tau)$ приближенно описывается дифференциальным уравнением

$$dz^*(\tau)=\varphi(\tau)d\tau \tag{9}$$

с известным начальным условием

$$z^*(0)=\hat{z}_0 \tag{10}$$

($\varphi(\tau)$ — известная функция).

По теореме Планшереля [1] выражение (7) с учетом уравнений (8) и (9) можно записать в следующем виде:

$$J(\alpha,\ x,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \|y(s)-hx(s)\|^2 ds+\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^\infty m_1^2(s)s^2\|x(s)-\mu_x(s)\|^2 ds+$$
$$+\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^\infty m_2^2(s)\|sz(s)-\varphi(s)\|^2 ds. \tag{11}$$

Здесь $t(s)$ — преобразование Лапласа функции $t(\tau)$.

Минимизируя (11) на функциях $x(s)$ и $z(s)$, получим регуляризованные решения

$$x_\alpha(\tau) = L^{-1}\left\{\frac{hy(s) + \alpha s^2 m_1^2(s)\,\mu_x(s)}{h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)}\right\}, \tag{12}$$

$$z_\alpha(\tau) = L^{-1}\left\{\frac{A(s)\,hK(s)\,[y(s) - ch\,K(s)\,u(s)] + sm_2^2(s)\,\varphi(s)}{A(s)\,h^2K^2(s) + s^2m_2^2(s)}\right\}, \tag{13}$$

где $A(s) = \dfrac{s^2m_1^2(s)}{h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)}$; $K(s)$ — преобразование Лапласа ядра $K(\tau-\eta)$ свертки

$$K(\tau) * x(\tau) \triangleq \int_0^\tau \exp\{-a(\tau-\eta)\}\,x(\eta)\,d\eta;$$

$L^{-1}\{\cdot\}$ — оператор обратного преобразования Лапласа.

Выражения (12), (13) определяют класс регуляризованных решений $x_\alpha(\tau)$ и $z_\alpha(\tau)$, зависящих от параметра регуляризации α, весовых функций $m_1^2(\tau)$ и $m_2^2(\tau)$, а также от опорной траектории $\varphi(\tau)$.

Среди семейства регуляризованных решений (12), (13) найдем оптимальные $\widehat{x}(\tau)$ и $\widehat{z}(\tau)$, обладающие минимальными дисперсиями погрешностей решений: $P_1(\tau) = E\{[x_\alpha(\tau) - x_0(\tau)]^2\}$ и $P_2(\tau) = E\{[z_\alpha(\tau) - z_0(\tau)]^2\}$, где $x_0(\tau)$ и $z_0(\tau)$ — точные решения. Для этого предварительно вычислим ошибку

$$x_\alpha(\tau) - x_0(\tau) = L^{-1}\left\{\frac{hy(s) - \alpha s^2 m_1^2(s)\,\mu_x(s)}{h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)} - x_0(s)\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{h\,[y(s) - hx_0(s)] + \alpha s m_1^2(s)\,[s\mu_x(s) - sx_0(s)]}{h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{hv(s) + \alpha s m_1^2(s)\,\xi(s)}{h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)}\right\}.$$

Тогда

$$P_1(\tau, \alpha, m_1^2(\tau)) = E\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{hv(s) + \alpha s m_1^2(s)\,\xi(s)}{h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{-is\tau\}\,ds\,\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{hv(s') + \alpha s' m_1^2(s')\,\xi(s')}{h^2 + \alpha s'^2 m_1^2(s')}\exp\{-is'\tau\}\,ds'\right\} = \frac{1}{4\pi^2}\times$$

$$\times\int_0^\infty\!\!\int \frac{h^2E\{v(s)\,v(s')\} + \alpha^2 ss' m_1^2(s)\,m_1^2(s')\,E\{\xi(s)\,\xi(s')\}}{[h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)]\,[h^2 + \alpha s'^2 m_1^2(s')]}\exp\{-i(s+s')\tau\}\,ds\,ds',$$

так как $E\{v(s)\xi(s')\} = 0$. Интегрируя в последнем двукратном интеграле по s' и пользуясь свойством дельта-функции, а также четностью функций $V(s) = L\{\sigma_v^2(\tau)\}$, $R(s) = L\{\sigma_\xi^2(\tau)\}$, получим

$$P_1(\tau, \alpha, m_1^2(\tau)) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{h^2V(s) + \alpha^2c^2s^2m_1^4(s)\,R(s)}{[h^2 + \alpha s^2 m_1^2(s)]^2}\,ds. \tag{14}$$

Элементарными вычислениями находим, что минимум (14) достигается при

$$m_1^2(s) = m_{1\text{опт}}^2(s) = V(s)/\alpha c^2 R(s). \tag{15}$$

Выполнив аналогичные вычисления, получим, что

$$P_2(\tau, \alpha, m_2^2(\tau)) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{A^2(s)\,h^2K^2(s)\,[V(s) + h^2K^2(s)\,c^2R(s)] + s^2m_2^4(s)\,N(s)}{[A(s)\,h^2K^2(s) + s^2m_2^2(s)]^2}\,ds, \tag{16}$$

где $N(s)$ — спектральная плотность погрешности $\eta(s)$ аппроксимации $z(s)$ функцией $\varphi(s)$. Минимизируя (16) на функциях $m_2^2(s)$ при $A(s) = A_{\text{опт}}(s) = s^2 m_{1\text{опт}}^2(s)/(h^2 + \alpha s^2 m_{1\text{опт}}^2(s))$, получим, что минимум достигается на функциях

$$m_2^2(s) = m_{2\text{опт}}^2(s) = V(s)/\alpha N(s), \tag{17}$$

так как $sK(s)\xi(s) = \xi(s)$.

Из выражений (12), (13), (15), (17) следует важный вывод о том, что оптимальные регуляризованные решения $x_{\alpha\text{опт}}(\tau)$, $z_{\alpha\text{опт}}(\tau)$ полностью определяются спектральными плотностями $V(s)$, $R(s)$ и $N(s)$. Однако решения интегралов (12), (13) известны лишь для некоторых частных случаев, не представляющих практического интереса. Поэтому $x_{\alpha\text{опт}}(\tau)$ и $z_{\alpha\text{опт}}(\tau)$ будем определять минимизацией функционала (7) с учетом выражений (15) и (17) в реальной временной области.

Для этого подставим в (11) выражения (15) и (17) и вновь используем теорему Планшереля. Тогда

$$J_{\text{опт}}(\alpha, x, z) = \int_0^\infty \| y(\tau) - hx(\tau) \|^2 d\tau + \int_0^\infty \frac{\sigma_v^2(\tau)}{c^2\sigma_\xi^2(\tau)} \| \xi(\tau) \|^2 d\tau + \int_0^\infty \frac{\sigma_v^2(\tau)}{\sigma_\eta^2(\tau)} \| \eta(\tau) \|^2 d\tau. \tag{18}$$

Так как $\sigma_v^2(\tau) > 0$, то минимизация (18) эквивалентна [4] минимизации взвешенного функционала

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma_v^2(\tau)} \| y(\tau) - hx(\tau) \|^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{c^2\sigma_\xi^2(\tau)} \| \xi(\tau) \|^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma_\eta^2(\tau)} \| \eta(\tau) \|^2 d\tau \tag{19}$$

при ограничениях (2)—(6) и условии

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi(\tau) + \eta(\tau), \tag{20}$$

где $\sigma_\eta^2(\tau)$ — дисперсия погрешности аппроксимации $\eta(\tau)$.

В теории оптимального оценивания [4] эта задача известна как задача оптимального оценивания состояния $x(\tau)$ и $z(\tau)$ динамической системы (2)—(6), (20) по методу наименьших квадратов. Оптимальные оценки $\widehat{x}(\tau)$ и $\widehat{z}(\tau)$ можно найти по известному алгоритму, получаемому минимизацией (19) при ограничениях (2)—(6), (20) с помощью принципа максимума Понтрягина и метода инвариантного погружения [4]. В векторной форме алгоритм оптимального оценивания имеет следующую запись:

$$\frac{d\widehat{\mathbf{X}}}{d\tau} = A\widehat{\mathbf{X}} + K(\tau)\left[y(\tau) - H\widehat{\mathbf{X}}\right] + \mathbf{C}u(\tau), \tag{21}$$

$$K(\tau) = P(\tau)H^T\left(\sigma_v^2(\tau)\right)^{-1}, \tag{22}$$

$$\frac{dP}{d\tau} = G\Psi(\tau)G^T + PA^T + AP + PH^T\left(\sigma_v^2(\tau)\right)^{-1}HP \tag{23}$$

с начальными условиями

$$\widehat{\mathbf{X}}(0) = \widehat{\mathbf{X}}_0, \quad P(0) = \infty,$$

где

$\widehat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \widehat{x}(\tau) \\ \widehat{z}(\tau) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Psi(\tau) = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2(\tau) & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2(\tau) \end{bmatrix}$, $H = [h\ 0]$, совпадающую по форме с алгоритмом фильтра

Калмана для системы (2)—(6), (20), в котором $P(\tau)$ — ковариационная матрица ошибок оценивания, а $\psi(\tau)$ — ковариационная матрица вектора случайных помех $\xi(\tau)=[\xi(\tau)\eta(\tau)]^T$. В теории оптимального оценивания известно [4], что минимальная дисперсия оценок $P(\tau)$ будет достигаться в том случае, когда погрешность аппроксимации $\eta(\tau)$ (как и другие погрешности $\xi(\tau)$ и $v(\tau)$) будет случайным гауссовым процессом. Если при этом для начальных значений $\widehat{x}(0)$ и $\widehat{z}(0)$ известны их оценки $\widehat{x}_0$ и $\widehat{z}_0$ и ковариационная матрица ошибок их задания $P(0)=P_0$, то можно использовать эту дополнительную информацию при получении оценок $\widehat{\mathbf{X}}(\tau)$. В этом случае оптимальные оценки получают минимизацией функционала

$$F(\mathbf{X})=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sigma_v^2(\tau)}\|y(\tau)-H\mathbf{X}\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \xi^T(\tau)\Psi^{-1}(\tau)\xi(\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}[\mathbf{X}(0)-\mathbf{X}_0]^T P_0^{-1}[\mathbf{X}(0)-\mathbf{X}_0], \qquad (24)$$

совпадающего с функционалом оптимального оценивания состояния динамической системы (2)—(6), (20) по методу максимума апостериорной вероятности (МАВ) [4]. При этом алгоритм решения (21) полностью совпадает с алгоритмом фильтра Калмана.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что:

1) оптимальное оценивание стохастических динамических систем по методу МАВ (в том числе и алгоритм фильтра Калмана) включается в число регуляризованных по Тихонову методов решения этой задачи;

2) регуляризованное оптимальное решение ОЗ динамической системы (1)—(5) может быть найдено путем решения эквивалентной задачи оптимального оценивания состояния системы (2)—(6), (20) по методу МАВ (если погрешности измерений $\xi(\tau)$, $v(\tau)$ и аппроксимации $\eta(\tau)$ суть случайные процессы типа белого шума);

3) оптимальное решение полностью определяется стохастическими характеристиками случайных процессов шумов измерений $\xi(\tau)$ и $v(\tau)$ и погрешностей аппроксимации $\eta(\tau)$ искомого решения $z(\tau)$ выражением (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Н.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
2. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.
3. **Симбирский Д. Ф.** Температурная диагностика двигателей.— Киев: Техника, 1976.
4. **Сейдж Э., Мейлс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М.: Связь, 1976.

Поступила в редакцию 25 января 1983 г.

УДК 621.391.244 : 517.587

А. А. КОЧЕТКОВ, В. В. КРЫЛОВ

(Горький)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛОВ ПО НЕОРТОГОНАЛЬНОМУ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ БАЗИСУ

Введение. При решении целого ряда прикладных задач возникает необходимость определять вклад в сигнал экспонент с различными постоянными времени. Эту процедуру в дальнейшем будем называть релаксационным анализом сигналов. Например, в электрогеологоразведке, про-