

в интерферометр непосредственно без преобразования телескопической системой. В этой ситуации $R_s = 0,4$ м и $\Delta z = 1$ м. Экспериментальные значения $\Delta\varphi_1$ отмечены на рисунке точками. При построении кривых 1 и 2 за начало отсчета расстояний принималась точка, соответствующая $z_{оп} = -\Delta z/2$, а для кривой 3 отсчет проводился непосредственно от делителя лучей.

Проведенные эксперименты подтверждают справедливость теоретических выводов о влиянии дифракционных фазовых сдвигов, возникающих в лазерном пучке, на результат интерференционных измерений длины. Кроме того, хорошее согласие экспериментальных данных с теорией позволяет повысить точность измерений длины и соответственно абсолютного значения ускорения силы тяжести либо путем введения соответствующих поправок, вычисленных непосредственно по формулам (6) и (7), либо использованием при расчетах эффективного значения длины волны (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Щур В. Л., Эцин Е. Ш. О влиянии расходимости пучка лазера на точность измерений в двухлучевом интерферометре. — Автометрия, 1976, № 3.
2. Monchalin J.-P. e. a. Accurate laser wavelength measurement with a precision two-beam scanning Mickelson interferometer. — Appl. Opt., 1981, vol. 20, N 5.
3. Арнаутов Г. П. и др. Измерение абсолютного значения ускорения силы тяжести лазерным баллистическим гравиметром. — Квант. электроника, 1979, т. 6, № 3.
4. Когельник, Ли. Резонаторы и световые пучки лазеров. — ТИИЭР, 1965, т. 54, № 10.
5. Занимонский Е. М., Мирошниченко О. Н. Влияние формы освещающего пучка на погрешность измерения длины лазерным интерферометром Майкельсона. — Измерит. техника, 1976, № 2.

Поступила в редакцию 16 декабря 1982 г.

УДК 621.391 : 621.317.373 : 519.24

Ю. М. ВЕШКУРЦЕВ

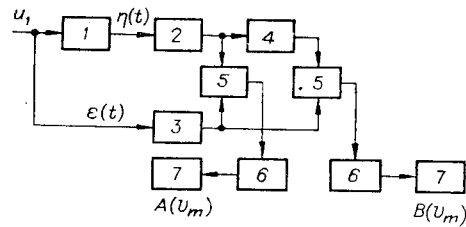
(Омск)

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФЛУКТУАЦИЙ ФАЗЫ АНАЛИЗАТОРОМ С ИДЕАЛЬНЫМ КАНАЛОМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПОРНОГО КОЛЕБАНИЯ

Изучению флуктуаций в науке и технике уделялось [1, 2] и уделяется сейчас [3] самое пристальное внимание. Интерес к ним, особенно к флуктуациям фазы колебаний, продиктован на данном этапе стремлением глубже проникнуть в сущность открытых физических явлений. Исследование тонкой структуры ионосферы, радиосвязь, в том числе и космическая, автоколебательные системы — вот далеко не полный перечень практических задач, в которых оказалось необходимым с помощью эксперимента точно установить величину флуктуации фазы. Однако традиционные принципы измерения флуктуаций фазы предусматривают наличие на входе статистического анализатора двух сигналов: сигнала $u_1(t) = U_{m1} \cos[\omega t + \varepsilon(t)]$ с измеряемыми флуктуациями фазы $\varepsilon(t)$ и связанного с ним опорного колебания $u_2(t) = U_{m2} \cos \omega t$. Поскольку абсолютно стабильного источника сигнала, фаза которого была бы постоянна в течение заданного интервала времени, не существует, приходится опорное колебание $u_2(t)$ формировать из реального сигнала.

Рис. 1. Функциональная схема статистического анализатора фазы:

1 — линейное устройство, 2 — канал преобразования опорного сигнала, 3 — канал преобразования исследуемого сигнала, 4 — фазовращатель на 90° , 5 — перемножитель, 6 — интегратор, 7 — индикатор.



Такая замена проделана, например, в схеме статистического анализатора флуктуаций фазы (рис. 1), в которой опорное колебание формируется путем задержки во времени исследуемого сигнала в линейном устройстве 1. После преобразований сигналов элементами схемы с двух индикаторов анализатора считывают оценки действительной $A(v_m)$ и мнимой $B(v_m)$ частей характеристической функции

$$\theta_1(v_m, t) = m_1 [e^{jv_m \Delta\varphi(t)}] \quad (1)$$

конечной разности 1-го порядка $\Delta\varphi(t) = \varepsilon(t) - \eta(t)$ флуктуаций фазы, где $\eta(t)$ — флуктуации фазы сигнала на выходе линейного устройства; $v_m = m\Delta v$ — параметр характеристической функции, $\Delta v = \pi/\Delta\varphi_{\max}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Затем по известным формулам [4] определяют статистические характеристики интересующих нас флуктуаций. Очевидно, что суммарная погрешность определения статистических характеристик флуктуаций зависит от погрешности измерения оценок $A(v_m)$, $B(v_m)$. В данной работе рассчитываются погрешности определения статистических характеристик флуктуаций фазы в предположении, что функции линейного устройства в схеме анализатора выполняет идеальный фильтр.

1. Корреляция флуктуаций фаз сигналов на входе и выходе идеального фильтра. Решение сформулированной задачи начнем с установления корреляции флуктуаций $\varepsilon(t)$ и $\eta(t)$. Известно, что коэффициент передачи идеального фильтра с П-образной частотной и линейной фазовой характеристиками равен $K(j\omega) = K_0 \exp(-j\omega T_0)$ при $-\omega_{\max} < \omega < \omega_{\max}$, где ω_{\max} — максимальная частота в спектре сигнала $u_1(t)$; T_0 — постоянная времени фильтра. Если положить $K_0 = 1$, то напряжение на выходе фильтра составит

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} G(j\omega) e^{j\omega t - j\omega T_0} d\omega = u_1(t - T_0). \quad (2)$$

Здесь $G(j\omega)$ — спектральная плотность сигнала $u_1(t)$. Отсюда получаем $u_{\text{вых}}(t) = U_m \cos[\omega t - \omega T_0 + \varepsilon(t - T_0)]$, т. е. сигнал $u_1(t)$ задерживается идеальным фильтром на время T_0 , не подвергаясь при этом каким-либо заметным искажениям. Сравнение выражений, определяющих $u_1(t)$ и $u_{\text{вых}}(t)$, показывает, что в них произошло преобразование флуктуаций $\varepsilon(t)$ в флуктуации $\varepsilon(t - T_0)$. Такое преобразование возможно, если импульсная характеристика идеального фильтра представляется дельта-функцией.

Тогда по известным соотношениям [5] можно рассчитать корреляцию флуктуаций фазы сигналов на входе и выходе идеального фильтра. Если обозначить функцию автокорреляции флуктуаций фазы $\varepsilon(t)$ через $k_\varepsilon(\tau)$, то функция автокорреляции флуктуаций на выходе фильтра будет $k_{\varepsilon\eta}(\tau) = k_\varepsilon(\tau)$, поскольку $\eta(t) = \varepsilon(t - T_0)$. При этом функция взаимной корреляции $k_{\varepsilon\eta}(\tau)$ флуктуаций фаз сигналов на входе и выходе фильтра оказывается равной $k_\varepsilon(\tau - T_0)$.

2. Дисперсии оценок действительной и мнимой частей характеристической функции с учетом реальных параметров схемы анализатора флуктуаций. Формулы для расчета погрешности измерения оценок $A(v_m)$ и $B(v_m)$, полученные в общем виде в работе [6], с небольшими изменения-

ми запишем в следующем виде:

$$M_2(A) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T g(T-t_1) g(T-t_2) [\operatorname{Re} \theta_4(v_m, -v_m, -v_m, v_m, t_2-t_1) + \\ + \operatorname{Re} \theta_4(v_m, v_m, -v_m, -v_m, t_2-t_1)] dt_1 dt_2 - \operatorname{Re}^2 \theta_2(v_m, -v_m), \quad (3)$$

$$M_2(B) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T g(T-t_1) g(T-t_2) [\operatorname{Re} \theta_4(v_m, -v_m, -v_m, v_m, t_2-t_1) - \\ - \operatorname{Re} \theta_4(v_m, v_m, -v_m, -v_m, t_2-t_1)] dt_1 dt_2 - \operatorname{Im}^2 \theta_2(v_m, -v_m). \quad (4)$$

Неизвестными функциями в формулах (3), (4) являются многомерные характеристические функции, зависящие от реальных параметров схемы анализатора и характеристик исследуемого сигнала $u_1(t)$.

Пусть средняя частота исследуемого сигнала $u_1(t)$ совпадает со средней частотой полосы пропускания идеального фильтра, а флуктуации фазы $\varepsilon(t)$ — нормально распределенный стационарный случайный процесс с нулевым средним значением. Природа возникновения изучаемых флуктуаций $\varepsilon(t)$ заранее неизвестна, однако в технике обычно постулируется, что флуктуации фазы имеют функцию автокорреляции, описываемую либо экспоненциальной

$$k_\varepsilon(\tau) = \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (5)$$

либо гауссовой

$$k_\varepsilon(\tau) = \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha^2 \tau^2} \quad (6)$$

кривыми, где σ_ε^2 — интенсивность флуктуаций $\varepsilon(t)$, α — параметр, характеризующий скорость флуктуаций. Приведенные функции автокорреляции имеют, например, фазовые шумы в точке приема радиосигнала обрзцовой частоты [7].

Для суммы конечного числа зависимых нормально распределенных случайных процессов характеристическую функцию (1) представим выражением [5]

$$\theta_n(v_1, v_2, \dots, v_n, t) = \exp \left(j \sum_{k=1}^n a_k v_k - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma_l \sigma_k R_{lk} v_l v_k \right), \quad (7)$$

где a — среднее значение, а σ — среднеквадратичное значение флуктуаций; R_{lk} — коэффициенты авто- и взаимной корреляции, которые для флуктуаций $\varepsilon(t)$, $\eta(t)$ установлены в первом разделе нашей работы. С учетом вышеизложенного материала вычислим необходимые нам впоследствии четырехмерные и двумерную характеристические функции для экспоненциальной (5) и гауссовой (6) форм кривых. После преобразований получим

$$\theta_4(v_m, -v_m, -v_m, v_m, t_2-t_1)_\varepsilon = \exp \left(-b_\varepsilon + 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|} - \right. \\ \left. - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha|t_2-t_1-T_0|} \right), \quad (8)$$

$$\theta_4(v_m, v_m, -v_m, -v_m, t_2-t_1)_\varepsilon = \exp \left(-b_\varepsilon - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|} + \right. \\ \left. + 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha|t_2-t_1-T_0|} \right), \quad (9)$$

$$\theta_2(v_m, -v_m)_\varepsilon = \exp(-1/2b_\varepsilon), \quad (10)$$

$$\theta_4(v_m, -v_m, -v_m, v_m, t_2-t_1)_\Gamma = \exp \left(-b_\Gamma + 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha^2(t_2-t_1)^2} - \right. \\ \left. - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha^2(t_2-t_1-T_0)^2} \right), \quad (11)$$

$$\theta_4(v_m, v_m, -v_m, -v_m, t_2-t_1)_\Gamma = \exp \left(-b_\Gamma - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha^2(t_2-t_1)^2} + \right. \\ \left. + 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-\alpha^2(t_2-t_1-T_0)^2} \right), \quad (12)$$

$$\theta_2(v_m, -v_m)_\Gamma = \exp(-1/2b_\Gamma), \quad (13)$$

где

$$b_0 = 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 - e^{-\alpha T_0}), \quad b_r = 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 - e^{-\alpha^2 T_0^2}).$$

Здесь и далее индекс «э» обозначает экспоненциальную, а индекс «г» — гауссову аппроксимацию функции $k_\varepsilon(\tau)$.

Если в схеме анализатора, показанной на рис. 1, интегратор δ имеет импульсную характеристику

$$g(T-t) = [\beta \exp[\beta(t-T/2)]]/2 \operatorname{sh}(\beta T/2), \quad (14)$$

то в нашей задаче окончательные выражения для дисперсий $M_2(A)$, $M_2(B)$ оценок действительной $A(v_m)$ и мнимой $B(v_m)$ частей характеристической функции (1) с учетом (3), (4), (8)–(13) приобретают вид

$$\begin{aligned} M_2(A)_0 = & \frac{e^{-b_0 - S/Q}}{4Q^2 \operatorname{sh}^2(S/2Q)} \left[\int_{-S}^0 \int_{-y}^S e^{(2x+y)/Q} \operatorname{ch}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^y - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-S/\delta} e^y) dx dy + \right. \\ & + \int_0^{S/\delta} \int_0^{S-y} e^{(2x+y)/Q} \operatorname{ch}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-y} - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{S/\delta} e^y) dx dy + \\ & \left. + \int_{S/\delta}^S \int_0^{S-y} e^{(2x+y)/Q} \operatorname{ch}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-y} - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-S/\delta} e^{-y}) dx dy \right] - \exp(-b_0), \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2(B)_0 = & \frac{e^{-b_0 - S/Q}}{4Q^2 \operatorname{sh}^2(S/2Q)} \left[\int_{-S}^0 \int_{-y}^S e^{(2x+y)/Q} \operatorname{sh}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^y - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-S/\delta} e^y) dx dy + \right. \\ & + \int_0^{S/\delta} \int_0^{S-y} e^{(2x+y)/Q} \operatorname{sh}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-y} - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-S/\delta} e^y) dx dy + \\ & \left. + \int_{S/\delta}^S \int_0^{S-y} e^{(2x+y)/Q} \operatorname{sh}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-y} - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{S/\delta} e^{-y}) dx dy \right], \quad (16) \end{aligned}$$

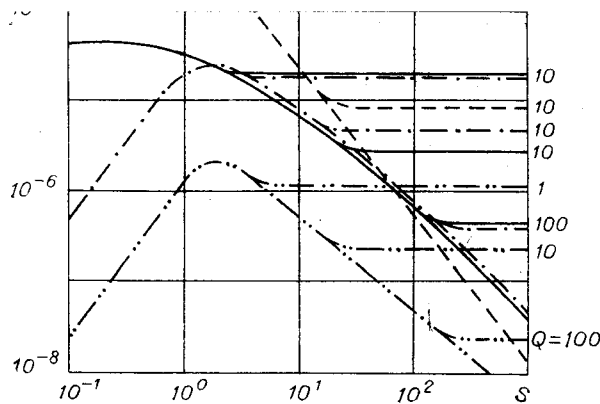
$$\begin{aligned} M_2(A)_r = & \frac{e^{-b_r - S/Q}}{4Q^2 \operatorname{sh}^2(S/2Q)} \int_0^S \int_0^S e^{(x+y)/Q} \operatorname{ch}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-(y-x)^2} - \\ & - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-(y-x-S/\delta)^2}) dx dy - \exp(-b_r), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2(B)_r = & \frac{e^{-b_r - S/Q}}{4Q^2 \operatorname{sh}^2(S/2Q)} \int_0^S \int_0^S e^{(x+y)/Q} \operatorname{sh}(2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-(y-x)^2} - \\ & - 2v_m^2 \sigma_\varepsilon^2 e^{-(y-x-S/\delta)^2}) dx dy, \quad (18) \end{aligned}$$

где $S = \alpha T$; $Q = \alpha/\beta$; $\delta = T/T_0$; T — длительность реализации разности $\Delta\varphi(t)$; β — параметр интегратора. Вычисление дисперсий (15)–(18) в аналитическом виде не представляется возможным. Поэтому нами для вычисления дисперсий $M_2(A)$, $M_2(B)$ применен метод численного интегрирования.

3. Результаты расчетов и их обсуждение. Расчет дисперсий (15)–(18) для разных значений v_m , S , Q , δ , σ_ε выполнен на ЭВМ ЕС-1022. При вычислении интегралов использовалась формула Симпсона, обеспечившая погрешность не хуже 0,1%. Результаты приближенного интегрирования представлены на рис. 2 и 3, где изображены зависимости $M_2(A)$, $M_2(B)$ от безразмерного времени интегрирования $S = \alpha T$, причем дробь α/β , характеризующая отношение ширины спектра флуктуаций к полосе интегратора, является параметром Q . Анализ графического материала позволяет выявить следующие закономерности.

На обоих рисунках при $S > 1$ выполняются приближенные ра-



(на рис. 2, 3 сплошные и штриховые линии — экспоненциальная аппроксимация, остальные линии — гауссова аппроксимация функции $k_e(\tau)$; $v_m = 1$; $\sigma_e^2 = \pi^2/72$; для сплошных и штрихпунктирных линий $\alpha T_0 = 0,04$; для штриховых — $\alpha T_0 = 0,1$; для остальных — $\alpha T_0 = 0,01$).

венства $M_2(A)_s \approx M_2(A)_r$, $M_2(B)_s \approx M_2(B)_r$, т. е. при идеальном канале формирования опорного колебания и большой постоянной времени интегратора погрешности измерения статистических характеристик флуктуаций

фазы практически не зависят от функции автокорреляции последних. Надо полагать, что количественные значения дисперсий характеризуют здесь потенциально достижимую точность измерения статистических характеристик конечной разности 1-го порядка фазы сигнала. Отметим, что указанное равенство дисперсий подтверждает состоятельность методики решения задачи и справедливость математических выражений для расчета анализируемых погрешностей.

При $S < 1$ приведенные выше равенства не сохраняются, они вырождаются в неравенства $M_2(A)_s > M_2(A)_r$, $M_2(B)_s > M_2(B)_r$. Эти неравенства возникают из-за неидеальности интегратора. Дело в том, что при гауссовой аппроксимации (6) доминируют довольно быстрые флуктуации фазы, в то время как при экспоненциальной — присутствуют достаточно медленно изменяющиеся фазовые сдвиги, для достижения заданной погрешности измерения которых требуется время интегрирования больше, чем при измерении быстрых флуктуаций. В остальном справедливыми остаются выводы [6], сделанные нами относительно ранее полученного графического материала.

Заметим, что от дисперсий на рис. 2, 3 можно легко перейти к среднеквадратичному или приведенному значению погрешностей измерения оценок $A(v_m)$ и $B(v_m)$, так как максимальная величина последних равна единице. Однако использованная нами форма представления промежуточных результатов в виде дисперсий удобна тем, что дисперсии без каких-либо пересчетов могут быть использованы для оценки погрешностей определения статистических характеристик флуктуаций фазы.

Можно показать, что погрешность оценки дифференциального закона $W_1(\Delta\phi, T_0)$ при независимых соседних отсчетах одноименных функций $A(v_m)$, $B(v_m)$ характеризуется зависимостью

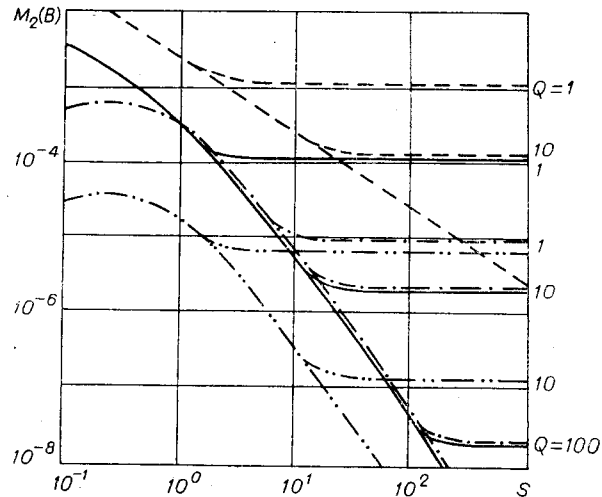


Рис. 3. Зависимость погрешности измерения оценки мнимой части характеристической функции от времени интегрирования.

$$M_2(W_1) = \frac{\Delta v^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \{M_2(A) \cos^2[v_m \Delta \varphi(T_0)] + M_2(B) \sin^2[v_m \Delta \varphi(T_0)]\},$$

в которую входят дисперсии, количественно представленные на рис. 2 и 3. Аналогичные зависимости можно привести для интегрального закона $F_1(\Delta \varphi, T_0)$ и моментов распределения $m_k[\Delta \varphi(T_0)]$. Они имеют вид

$$M_2(F_1) = \frac{1}{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{-2} \{M_2(A) \sin^2[v_m \Delta \varphi(T_0)] + M_2(B) \times$$

$$M_2(m_2) = \frac{16}{\Delta v^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} M_2(A),$$

$$M_2(m_3) = \frac{4}{\Delta v^6} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 m^2 - 6)^2}{m^6} M_2(B),$$

$$M_2(m_4) = \frac{64}{\Delta v^8} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 m^2 - 6)^2}{m^8} M_2(A),$$

отличный от известных [8], при выводе которых, по-видимому, была допущена ошибка в записи исходной формулы для расчета дисперсий.

Таким образом, пробные расчеты и полученные при этом результаты подтверждают состоятельность и пригодность для практики сформулированной в работе методики оценки погрешностей определения статистических характеристик флуктуаций фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам Л. И. Интерференционные методы исследования распространения радиоволн и их применение к измерению расстояний.— Полн. собр. трудов. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1947, т. 2, с. 232.
2. Берштейн И. Л. Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1950, т. 14, № 2.
3. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах.— М.: Наука, 1968.
4. Вешкурцев Ю. М. Оценки вероятностных характеристик относительных параметров сигнала и алгоритмы для их определения.— В кн.: Методы и аппаратура для измерения сдвига фаз. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1980.
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1966.
6. Вешкурцев Ю. М. О влиянии коэффициента взаимной корреляции сигналов на точность оценок статистических характеристик фазовых флуктуаций.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. Техника радиосвязи, 1969, вып. 9.
7. Пашев Г. П., Поршнев В. А., Садовский А. Б. Новые методы обработки информации при высокоточных измерениях отклонений частоты квантовых мер частоты по сигналу образцовой частоты радиостанции РБУ 66, (6) кГц.— Техника средств связи. Сер. РТ, 1977, вып. 2 (8).
8. Гольдберг Н. И. Оценки математического ожидания и дисперсии случайного процесса.— Радиотехника, 1965, т. 20, № 4.

Поступила в редакцию 7 июля 1982 г.;
окончательный вариант — 2 марта 1983 г.