УДК 62-501.4 : 518.5

Л. А. ИЩЕНКО, О. Г. РУДЕНКО

(Харьков)

МНОГОШАГОВЫЕ АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Введение. Известно, что задача идентификации линейного объекта, описываемого уравнением

$$y_n = c^{*\text{т}}x_n + \xi_n \tag{1}$$

(y_n — наблюдаемый выходной сигнал; $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{N,n})^\text{т}$ — вектор входных воздействий; $c^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots, c_N^*)^\text{т}$ — вектор неизвестных коэффициентов; ξ_n — помеха на выходе; т — символ транспонирования), заключается в определении c^* по результатам наблюдений x_n и y_n и сводится к минимизации некоторого наперед выбранного функционала качества. Вычислительная простота и универсальность метода стохастической аппроксимации обеспечили ему широкое применение при решении подобных задач. В основе этого метода лежат рекуррентные процедуры, минимизирующие заданный функционал в условиях помех и недостаточной априорной информации. Сходимость процедур доказывается при довольно широких предположениях относительно входящих в эти процедуры параметров. При практической же реализации подобных алгоритмов важнейшим показателем их работоспособности является скорость сходимости. Обычно используются два способа ускорения сходимости таких процедур. Первый способ основывается на соответствующем выборе входящих в процедуры параметров, а второй — на использовании при построении очередной итерации большого числа наблюдений (переход к многошаговым процедурам). В последнем случае благодаря лучшей экстраполяции и фильтрации можно ожидать существенного сокращения времени идентификации.

Преимущества многошаговых алгоритмов отмечались в [1], в [2] проведен сравнительный анализ одно- и двухшаговых алгоритмов, в [3] предложена многошаговая процедура Качмажа и исследованы ее свойства, в [4, 5] рассмотрены вопросы сходимости многошаговых алгоритмов.

Построение многошаговых алгоритмов. S-шаговый алгоритм идентификации может быть представлен в виде

$$c_n = c_{n-1} + \sum_{i=1}^{S} \gamma_{in}\left(y_{n-i+1} - c_{n-1}^\text{т}x_{n-i+1}\right)x_{n-i+1}. \tag{2}$$

Задача построения алгоритма заключается в нахождении коэффициентов γ_{in}, обеспечивающих его наибольшую скорость сходимости.

Одним из наиболее удобных критериев, характеризующих скорость сходимости алгоритмов, является величина

$$\psi_n = \|v_{n-1}\|^2 - \|v_n\|^2, \tag{3}$$

где

$$v_i = c_i - c^*, \ \|v_i\|^2 = \sum_{j=1}^{N} v_{j2}^2.$$

Для сходимости алгоритма необходимо, чтобы $\psi_n > 0$. При этом каждая последующая точка c_n лежит внутри гипершара радиусом $\|c_{n-1} - c^*\|$ с центром в точке c^*, т. е. обеспечивается монотонная сходимость алгоритма.

Рассмотрим построение одношагового алгоритма, максимизирующего ψ_n. Записав одношаговый алгоритм относительно ошибок оценки коэффициентов v_i, возведя обе части полученного выражения в квадрат и подставив значения v_n и v_{n-1} в (3), найдем

$$\psi_n = 2\gamma_{1n}(v_{n-1}^{\text{т}}x_n)^2 - \gamma_{1n}^2(v_{n-1}^{\text{т}}x_n)^2\|x_n\|^2.$$

Взяв производную $\partial\psi_n/\partial\gamma_{1n}$ и приравняв ее нулю, получим уравнение относительно γ_{1n}, решая которое определим $\gamma_{1n}^{\text{опт}}$:

$$\gamma_{1n}^{\text{опт}} = \|x_n\|^{-2}.$$

Следовательно, оптимальный одношаговый алгоритм совпадает с алгоритмом Качмажа [1, 3].

При построении оптимального двухшагового алгоритма ($S=2$) будем иметь систему двух уравнений с двумя неизвестными γ_{1n} и γ_{2n}, решая которую получим следующие выражения для $\gamma_{1n}^{\text{опт}}$ и $\gamma_{2n}^{\text{опт}}$:

$$\gamma_{1n}^{\text{опт}} = \frac{(v_{n-1}^{\text{т}}x_n)\|x_{n-1}\|^2 - (v_{n-1}^{\text{т}}x_{n-1})(x_n^{\text{т}}x_{n-1})}{(v_{n-1}^{\text{т}}x_n)\left[\|x_n\|^2\|x_{n-1}\|^2 - (x_n^{\text{т}}x_{n-1})^2\right]};$$

$$\gamma_{2n}^{\text{опт}} = \frac{(v_{n-1}^{\text{т}}x_{n-1})\|x_n\|^2 - (v_{n-1}^{\text{т}}x_n)(x_n^{\text{т}}x_{n-1})}{(v_{n-2}^{\text{т}}x_{n-1})\left[\|x_n\|^2\|x_{n-1}\|^2 - (x_n^{\text{т}}x_{n-1})^2\right]}.$$

Таким образом, задача построения S-шагового алгоритма сводится к решению системы S линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных γ_{in} $(i=\overline{1, S})$. Решение этой системы приводит к следующему алгоритму [3]:

$$c_n = c_{n-1} + X_n^{(S)}\left[X_n^{(S)\text{т}}X_n^{(S)}\right]^{-1}E_n^{(S)}, \tag{4}$$

где $X_n^{(S)} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-S+1})$ — матрица $N\times S$; $E_n^{(S)} = (y_n - c_{n-1}^{\text{т}}x_n, y_{n-1} - c_{n-1}^{\text{т}}x_{n-1}, \ldots, y_{n-S+1} - c_{n-1}^{\text{т}}x_{n-S+1})^{\text{т}}$ — вектор $S\times 1$.

Скорость сходимости S-шагового алгоритма. Если в алгоритме Качмажа ($S=1$) очередная оценка c_n является ближайшей к c^* на прямой, проходящей через точку c_{n-1} и параллельной вектору x_n, то в алгоритме (4) при $S>1$ c_n — ближайшая к c^* на S-мерной гиперплоскости, проходящей через c_{n-1} и параллельной векторам $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-S+1}$.

Записанный относительно ошибок идентификации v_i $(i=n, n-1)$ алгоритм (4) будет иметь вид

$$v_n = \left(I - X_n^{(S)}\left[X_n^{(S)\text{т}}X_n^{(S)}\right]^{-1}X_n^{(S)\text{т}}\right)v_{n-1},$$

где I — единичная матрица.

Входящая в это выражение матрица $\left(I - X_n^{(S)}\left[X_n^{(S)\text{т}}X_n^{(S)}\right]^{-1}X_n^{(S)\text{т}}\right)$ является N-мерной квадратной проецирующей матрицей. Она обладает тем свойством, что ортогональная проекция v_{n-1} (обозначим ее v_M) на подпространство E^S, натянутое на S векторов $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-S+1}$, ортогональна вектору $v_{n-1} - v_M$, т. е. можно записать $v_n = v_{n-1} + v_M$ [6]. Вектор v_n перпендикулярен всем векторам пространства E^S, т. е. векторам $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-S+1}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить $X_n^{(S)\text{т}}v_n$:

$$X_n^{(S)\text{т}}v_n = X_n^{(S)\text{т}}\left(I - X_n^{(S)}\left[X_n^{(S)\text{т}}X_n^{(S)}\right]^{-1}X_n^{(S)\text{т}}\right)v_{n-1} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \ldots & x_{N,n} \\ x_{1,n-1} & x_{2,n-1} & \ldots & x_{N,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1,n-S+1} & x_{2,n-S+1} & \ldots & x_{N,n-S+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,n} \\ v_{2,n} \\ \ldots \\ v_{N,n} \end{pmatrix} = 0$$

и векторы $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-S+1}$ ортогональны вектору v_n. Аналогично векторы $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-S+1}$ ортогональны v_{n-1}.

Предположим, что вектор входных воздействий имеет нулевое среднее и некоррелированные составляющие, т. е. $x \sim N(0, \sigma^2 I)$.

Для определения скорости сходимости S-шагового алгоритма необходимо вычислить

$$M\{\|v_n\|^2\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{Nn}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} e^{-(2\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2} \times$$

$$\times (\|v_{n-1}\|^2 - \|v_M\|^2)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (5)$$

Проинтегрируем выражение (5) сначала по x_n. Интегрирование значительно упрощается определенным выбором базиса в N-мерном пространстве E_N.

Определим $(S-1)$-мерное подпространство, натянутое на векторы $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-S+1}$. Выберем в этом подпространстве ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_S$. Так как v_{n-1} перпендикулярен всем векторам этого базиса, то S-й вектор всего базиса в пространстве E_N направим по v_{n-1}. Полученные S единичных ортогональных векторов можно дополнить до полного ортонормированного базиса во всем пространстве E_N.

Запишем вектор v_M в выбранном базисе. Так как $v_M \in E^{(S)}$, то он может быть представлен в виде линейной комбинации

$$v_M = \alpha_1 x_{n-S+1} + \alpha_2 x_{n-S+2} + \ldots + \alpha_S x_n.$$

В свою очередь, векторы $x_{n-S+1}, x_{n-S+2}, \ldots, x_{n-1} \in E^{(S-1)}$, т. е. их можно выразить через базис $e_1, e_2, \ldots, e_{S-1}$. Таким образом, в базисе E_N у них будут ненулевыми только первые $(S-1)$ координат. Вектор x_n может иметь в базисе E_N все координаты. Запишем

$$v_M = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_{S-1} e_{S-1} + \alpha_S(\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_S e_S + \ldots + \gamma_N e_N).$$

В связи с тем, что v_n и v_{n-1} ортогональны векторам $e_1, \ldots, e_{S-1}$, их первые $(S-1)$ координат в базисе $e_1, \ldots, e_N$ будут ненулевыми. Так как $v_{n-1} = v_M + v_n$, то и v_M должен иметь первые $(S-1)$ координат нулевыми. Из этого следует, что

$$\beta_1 e_1 + \ldots + \alpha_S \gamma_1 e_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_{S-1} e_{S-1} + \ldots + \alpha_S \gamma_{S-1} e_{S-1} = 0.$$

Вектор v_M будет иметь вид

$$v_M = \alpha_S \gamma_S e_S + \ldots + \alpha_S \gamma_N e_N.$$

Итак, все $(N-S+1)$ координат вектора v_M пропорциональны $(N-S+1)$ координатам вектора x_n: $v_M = \alpha_S \overset{*}{x}_n$, где $\overset{*}{x}_n$ получен из вектора x_n обнулением первых $(S-1)$ координат.

Для нахождения коэффициента пропорциональности α_S вычислим

$$v_M^{\mathrm{T}} x_n = \alpha_S(\overset{*}{x}{}_n^{\mathrm{T}} x_n) = \alpha_S \|\overset{*}{x}_n\|^2.$$

Так как $v_n^{\mathrm{T}} x_n = 0$, то

$$v_{n-1}^{\mathrm{T}} x_n = v_M^{\mathrm{T}} x_n + v_n^{\mathrm{T}} x_n = \alpha_S \|\overset{*}{x}_n\|^2.$$

В связи с тем, что вектор v_{n-1} направлен по e_S, можно записать, что $v_{n-1} = \|v_{n-1}\| e_S$. Тогда $v_{n-1}^{\mathrm{T}} x_n = \|v_{n-1}\| x_{S,n}$ и $\alpha_S \|\overset{*}{x}_n\|^2 = \|v_{n-1}\| x_{S,n}$, т. е. $\alpha_S = (\|v_{n-1}\| x_{S,n}) \|\overset{*}{x}_n\|^2$. Подставляя α_S в выражение для $\|v_M\|^2$, получим

$$\|v_M\|^2 = \frac{\|v_{n-1}\|^2 x_{S,n}^2}{\|\overset{*}{x}_n\|^2}.$$

Выражение для $M\{\|v_n\|^2\}$ (5) будет иметь вид

$$M\{\|v_n\|^2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{Nn}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} \|v_{n-1}\|^2 e^{-(2\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2} \times$$

$$\times\left(1-\frac{x_{S,n}^2}{x_{S,n}^2+\ldots+x_{N,n}^2}\right)dx_1\ldots dx_n.$$

Проинтегрируем его по x_n, введя следующие обозначения:

$$\omega=1/2\sigma^2;\ J_0(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega x^2}dx=\sqrt{2\pi}\,\sigma;$$

$$\underbrace{\quad}_{S-1}\ 1\ \int\limits^{\infty}\ \int\limits^{\infty}\ -\omega\|x_n\|^2\ x_{S,n}^2$$

и

$$I_1=\underbrace{\int\ldots\int}_{N-S+1}e^{-\omega\left(x_{S,n}^2+\ldots+x_{N,n}^2\right)}\frac{1}{J_0^{N-S+1}}\frac{x_{S,n}^2}{x_{S,n}^2+\ldots+x_{N,n}^2}dx_{S,n}\ldots dx_{N,n}.$$

Определим

$$\frac{d\left(I_1J_0^{N-S+1}\right)}{d\omega}=-\int e^{-\omega x_{S,n}^2}x_{S,n}^2dx_{S,n}\underbrace{\int\ldots\int}_{N-S}e^{-\omega\left(x_{S+1,n}^2+\ldots+x_{N,n}^2\right)}\times$$

$$\times\,dx_{S+1,n}\ldots dx_{N,n}.$$

Так как

$$\frac{dJ_0}{d\omega}J_0^{N-S}=\frac{1}{N-S+1}\frac{d}{d\omega}\left(J_0^{N-S+1}\right),$$

после интегрирования по ω получаем

$$I_1J_0^{N-S+1}=\frac{1}{N-S+1}\left(J_0^{N-S+1}+C\right).$$

Из того, что при $\omega\to\infty$ $J_0\to 0$, $I_1\to 0$, следует $C=0$. Поэтому

$$I_1=1/(N-S+1).$$

Итак, после интегрирования (5) по x_n имеем

$$M\{\|v_n\|^2\}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^{N(n-1)}}\underbrace{\int\ldots\int}_{n-1}\|v_{n-1}\|^2\left(1-\frac{1}{N-S+1}\right)e^{-\omega\sum\limits_{i=1}^{n-1}\|x_i\|^2}\times$$

$$\times\,dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

Представив $\|v_{n-1}\|^2$ в виде

$$\|v_{n-1}\|^2=\|v_{n-2}\|^2\left(1-\frac{x_{S,n-1}^2}{x_{S,n-1}^2+\ldots+x_{N,n-1}^2}\right)$$

и рассуждая по аналогии с вышеизложенным (интегрируя по x_{n-1}, выбирая новый базис и т. д.), окончательно получаем

$$M\{\|v_n\|^2\}=(1-1/(N-S+1))^{n-S}M\{\|v_S\|^2\}.\qquad(6)$$

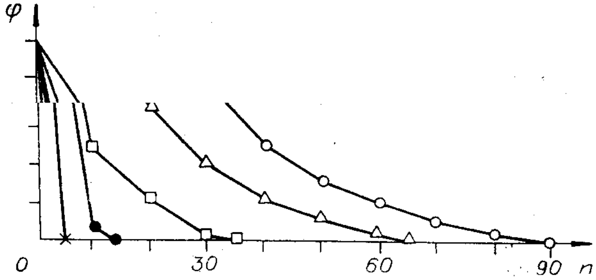
Из (6) следует, что если на первых S шагах происходит уточнение оценок по алгоритму Качмажа, то

$$M\{\|v_n\|^2\}=(1-1/N)^S(1-1/(N-S+1))^{n-S}\|v_0\|^2.$$

Если же на первых S шагах проводится накопление информации и оценка $c_S=c_1$ строится только после получения x_S, x_{S-1}, …, x_1, то

$$M\{\|v_n\|^2\}=(1-S/N)(1-1/(N-S+1))^{n-S}\|v_0\|^2.$$

Таким образом, учет информации на S предыдущих шагах ана-логичен [illegible] про-цесс идентификации стационарного и нестационарного объектов. Вектор параметров c^* выбирался равным: $c^* = (0{,}15;\ 0{,}2;\ 0{,}25;\ 0{,}3;\ 0{,}35)^т$. В качестве компонент входных векторов принимались последовательности нормально распределенных случайных величин (типа дискретного белого шума) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Начальные значения параметров во всех случаях единичные. Проводилось усреднение результатов по 20 реализациям.



На рисунке приведена зависимость величины $\varphi = \|v_n\|^2/\|v_0\|^2$ от n в случае идентификации стационарного объекта. На этом рисунке линия с кружками соответствует алгоритму с $S=1$, с треугольниками — $S=2$, с квадратами — $S=3$, с точками — $S=4$, с крестиками — $S=5$. Как следует из рисунка, с увеличением памяти алгоритма (S) скорость сходимости алгоритма (4) увеличивается и существенно превосходит скорость сходимости алгоритма Качмажа ($S=1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.
2. **Поляк Б. Т.** Сравнение скорости сходимости одношаговых и многошаговых алгоритмов оптимизации при наличии помех.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1977, № 1.
3. **Аведьян Э. Д.** Модификационные алгоритмы Качмажа для оценки параметров линейных объектов.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 5.
4. **Шильман С. В., Ястребов А. И.** О свойствах одного класса многошаговых алгоритмов адаптации и обучения градиентного и псевдоградиентного типа.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 4.
5. **Руденко О. Г., Сальга В. И., Штонда А. Н.** Многошаговый адаптивный алгоритм идентификации.— В кн.: Управление металлургическими процессами и производствами и их моделирование.— М.: Металлургия, 1980.
6. **Ланкастер П.** Теория матриц.— М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 25 января 1983 г.

УДК 62-50

А. И. БУРДО, В. Е. ПЯТЕЦКИЙ

(Темиртау Карагандинской)

РАЗРАБОТКА КЛАССА АЛГОРИТМОВ АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В задачах адаптивного управления важное место занимает идентификация моделей управляемых процессов, которые уточняются по мере накопления данных об объекте. Известные адаптивные одношаговые алгоритмы оценки неизвестных параметров процесса основаны на мини-