АСПИ с П1 становится нецелесообразным по сравнению с циклической СПИ (см. значения $K_{в,\,ст}$).

Заключение. Метод, приведенный в статье, позволяет определять среднеквадратические погрешности восстановления сообщений в АСПИ с полиномиальными апертурными алгоритмами сжатия данных. Последние могут быть использованы в качестве целевых функций при параметрической оптимизации систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Калашников И. Д., Степанов В. С., Чуркин А. В.** Адаптивные системы сбора и передачи информации.— М.: Энергия, 1975.
2. **Журавин Л. Г., Крюкова И. Е.** О минимизации суммарной динамической погреш-
7. **Давыдов В. С., Дробышев Ю. П., Игнатьев В. Э.** Оценка качества восстановления сигнала в системе с предсказателем первого порядка (теоретический анализ).— В кн.: Тез. докл. VIII Всесоюз. конф. по теории кодирования и передачи информации, 1981, ч. 1.

Поступила в редакцию 25 января 1983 г.

УДК 62.505 : 519.24

А. Н. ПАВЛОВ

(Белгород)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПОВ

Решение задач идентификации объектов с распределенными параметрами (ОРП), которые описываются многомерными нелинейными нестационарными дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП) параболического и эллиптического типов, исследовано сравнительно мало. Особую актуальность это направление приобретает для таких областей управления, как нефте- и газодобыча, теплоэнергетика, горное дело, охрана окружающей среды, водоснабжение городов, мелиорация, гидротехническое строительство, разведка месторождений и многие другие [1—4].

В настоящее время роль идентификации возросла еще больше. Это связано с тем, что в целом ряде случаев результаты идентификации являются единственным источником получения сведений о неизвестных параметрах объекта. Для двумерного случая ДУЧП параболического типа запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P_1(x, y, \Theta)\frac{\partial\Theta(x, y, t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[P_2(x, y, \Theta)\frac{\partial\Theta(x, y, t)}{\partial y}\right] \pm f(x, y, \Theta, t) = = P_3(x, y, \Theta)\frac{\partial\Theta(x, y, t)}{\partial t}; \tag{1}$$

$$N[\Theta(x, y, t)] = \Theta_0(x, y),\ x,\ y \in \Omega,\ x,\ y \in \Gamma_0; \tag{2}$$

$$\Gamma[\Theta(x, y, t)] = \Theta_\Gamma(x, y, t),\ t \geqslant t_0, \tag{3}$$

где x, y — пространственные переменные, принимающие свои значения в области Ω в l-мерном евклидовом пространстве E^l, включая границу Γ_0; t — время; t_0 — момент начала возмущения ОРП; $\Theta(x, y, t)$ — измеряемая в области Ω функция, характеризующая состояние ОРП; $f(x, y, \Theta, t)$ — распределенная функция возмущения ОРП; $P_i(x, y, \Theta)$ — параметры ОРП; $N[\cdot]$, $\Gamma[\cdot]$ — операторы начальных (НУ) и граничных (ГУ) условий соответственно; $\Theta_0(x, y)$, $\Theta_\Gamma(x, y, t)$ — заданные функции.

В формальной постановке задача идентификации сводится к экстремальной, если ввести критериальный функционал $F(\cdot)$, а затем искать такой вектор параметров объекта $\mathbf{P}$, что

$$|F_j[\Theta(\Omega, t), \Theta^*(\Omega, t)]| \to \min_{P \in G}, \quad \forall j = \overline{1, N} \tag{4}$$

при ограничениях на величины

$$\begin{gathered} A(\Omega, t),\ \mathrm{St},\ \mathbf{X}(\Omega, t),\ \mathbf{Z}(\Omega, t),\ t_0 \leqslant \Delta t \leqslant t_1, \\ \boldsymbol{\lambda}(\Omega, t),\ \boldsymbol{\tau}(\Omega, t),\ \boldsymbol{\Lambda}(\Omega, t),\ \boldsymbol{\sigma}(\Omega, t), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\Theta(\Omega, t)$, $\Theta^*(\Omega, t)$ — выходные переменные модели и ОРП соответственно (например, температура, давление, концентрация и т. п.); G — область определения искомого вектора $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$, входящего в качестве коэффициентов в одно или несколько ДУЧП; N — число точек контроля (измерительных датчиков), распределенных по объекту и необходимых для идентификации ОРП; $A(\Omega, t)$ — известный оператор (1), описывающий динамические характеристики ОРП; St — структура ОРП; $\mathbf{X}(\Omega, t)$, $\mathbf{Z}(\Omega, t)$ — векторы входных и возмущающих контролируемых и неконтролируемых переменных ОРП соответственно; $\Delta t = t_1 - t_0$ — интервал времени, на котором решается задача идентификации; $\boldsymbol{\lambda}(\Omega, t)$ — вектор весовых коэффициентов, определяемый значимостью каждой из выходных переменных; $\boldsymbol{\tau}(\Omega, t)$, $\boldsymbol{\Lambda}(\Omega, t)$ — векторы соответственно периодичности и продолжительности контроля переменных объекта; $\boldsymbol{\sigma}(\Omega, t)$ — вектор целесообразной точности измерения $\mathbf{X}(\Omega, t)$, $\boldsymbol{\Theta}(\Omega, t)$ и $\mathbf{Z}(\Omega, t)$.

Определение $\boldsymbol{\Theta}(\Omega, t)$ при реализации процедуры идентификации на ЭВМ следует проводить с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [5]. При этом решение краевой задачи (1)—(3) сводится к минимизации функционала вида

$$I = \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{2} \Big[P_1(\Omega, \Theta) \Big[\frac{\partial \Theta(\Omega, t)}{\partial x} \Big]^2 + P_2(\Omega, t) \Big[\frac{\partial \Theta(\Omega, t)}{\partial y} \Big]^2 \Big] - \Theta(\Omega, t) \Big[f(\Omega, \Theta, t) -$$

$$- P_3(\Omega, \Theta) \frac{\partial \Theta(\Omega, t)}{\partial t} \Big] \Big\} dxdy - \int_\Gamma \Theta(\Omega, t) \Psi_2 dz \to \min, \quad \forall [P]_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $[P]_i$ — матрица планирования i-го варианта решения ДУЧП; n — число вариантов решения ДУЧП МКЭ.

Разбив область $\Omega + \Gamma$ на k треугольных непересекающихся подобластей $\Omega_i \in \Omega$, $i = \overline{1, k}$, записав функционал (6) для одного треугольника и выбрав

$$\Theta(\Omega_i, t) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \tag{7}$$

после записи (6) в бицентрических координатах и дифференцирования его по каждой вершине треугольника Θ_i, Θ_j, Θ_k с приравниванием производных нулю и последующим объединением по всей области, получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$[\xi] \times \boldsymbol{\Theta} + [M] \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{X}, \tag{8}$$

$[\xi]$, $[M]$ — матрицы параметров ОРП.

Для решения (8) использована схема Либмана. В этом случае система (8) сводится к уравнениям вида

$$([\xi] + (1/\Delta t)[M]) \times \boldsymbol{\Theta}_t = (1/\Delta t)[M] \times \boldsymbol{\Theta}_{t-\Delta t} + \mathbf{X}. \tag{9}$$

Здесь Δt — интервал дискретизации; $\mathbf{\Theta}_t$, $\mathbf{\Theta}_{t-\Delta t}$ — значения $\mathbf{\Theta}$ на расчетный и предыдущий интервалы времени соответственно.

В программах, реализующих МКЭ на ЕС-1022, уравнения (9) решаются методом Гаусса. В результате проведенных вычислительных экспериментов на ЭВМ ЕС-1022 получены зависимости определения погрешности решения ДУЧП (1) МКЭ при реализации планов многофакторных экспериментов в зависимости от характеристик ОРП, НУ и ГУ. Зависимость σ_Θ с достаточной для практики точностью аппроксимируется выражением вида $\sigma_\Theta = \gamma\delta^{-1}$, где γ — коэффициент, зависящий от характеристик ОРП, НУ и ГУ; $\delta = t/\Delta t$ — число временных шагов при решении ДУЧП; t — конечное время решения ДУЧП МКЭ; Δt — шаг временной дискретизации.

Матрица планирования вариантов решения ДУЧП МКЭ

Номер варианта решения ДУЧП МКЭ	Искомые параметры ОРП				Критерии идентификации F_j
	P_1	P_2	...	P_m	
1	−1	−1	...	−1	$\mathbf{F}_1$
2	+1	−1	...	+1	$\mathbf{F}_2$
...	...	...	...	...	...
n	+1	+1	...	+1	$\mathbf{F}_n$

Решение (4) при условии (5) сводится к поиску $\mathbf{P}$ по результатам измерений $X(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $Z(\cdot)$ и приводит к одновременной минимизации N критериев $|F_j(\mathbf{P})| \to \min$, $\forall j = \overline{1, N}$, причем если $F_j(\mathbf{P}_i) \leqslant F_j(\mathbf{P}_{i+1})$, то $\mathbf{P}_i \succ \mathbf{P}_{i+1}$, где $\succ$ — символ предпочтения. Если $F_j(\mathbf{P}_i) = F_j(\mathbf{P}_{i+1})$, то векторы эквивалентны $\mathbf{P}_i \sim \mathbf{P}_{i+1}$. В соответствии с методами планирования экспериментов (МПЭ) на первом шаге поиска $\mathbf{P}$, обеспечивающего $F_j(\cdot) \leqslant \varepsilon_j$ (ε_j — эпсилон-барьер критерия F_j), поверхность критерия $F(\cdot)$ в окрестности достаточно удаленной от минимума $F(\cdot)$ точки аппроксимируется системой линейных уравнений

$$F_j = a_0^{(j)} + a_1^{(j)} P_1 + a_2^{(j)} P_2 + \ldots + a_m^{(j)} P_m, \quad \forall j = \overline{1, N}, \tag{10}$$

где $a_0^{(j)}$, $a_i^{(j)}$ — коэффициенты, определяемые, например, методом наименьших квадратов по результатам многократного решения ДУЧП МКЭ в соответствии с планом, который приведен в таблице (все обозначения даны в кодированных переменных).

Выбор наилучшего факторного плана $[P]$ производится по критерию

$$\mathbf{K}[|\mathbf{F}(\mathbf{P})| \to \min; \ [P]] \tag{11}$$

при условии

$$\det [[P]^T [P]]^{-1} > 0 \tag{12}$$

($\mathbf{K}[\cdot]$ — векторный критерий оптимизации $[P]$).

Для вычисления (10) используются планы, у которых

$$\operatorname{sign} 1P(\varphi) = \begin{cases} P_1 \forall\varphi \geqslant 0; \\ P_2 \forall\varphi < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\operatorname{sign} 1P(\varphi)$ — переключательная функция; φ — аргумент в кодированных переменных, от которого зависит формирование $[P]$.

После проверки адекватности (10) отдельно по каждой точке контроля (ТК) выполняется процедура крутого спуска (КС) и определяются области экстремумов V_j, $j = \overline{1, N}$, причем области V_j могут быть несвязанными. В общем случае для нахождения V_j, $j = \overline{1, N}$, процедура КС может проводиться многократно. Вход в область экстремума вычисляется по критерию

$$\mathbf{K}_1 = (F^*, \ k, \ p) \to \max, \tag{14}$$

где F^* — критерий Фишера; $k = |F_1 - F_2|$ — кривизна поверхности отклика; F_1, F_2 — величины критериев, полученные в центре плана $[P]$ соответственно в результате решения ДУЧП МКЭ и уравнения (10); p — вероятность достижения области экстремума.

Для оценки ошибки определения направления КС используется зависимость

$$\varphi = \arccos \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i a'_i}{\left[\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \sum_{i=1}^{m} (a'_i)^2\right]^{1/2}}, \tag{15}$$

где a'_i — оценка i-го коэффициента уравнения (10) в частном случае; $a'_i = a_i + \sigma_i$; σ_i — ошибка вычисления коэффициента a_i уравнения (10).

Длина рабочего шага при КС вычисляется из формулы

$$\Delta P_k^i = \frac{|\nabla F|_{k-1} v_{k-1}}{\sigma v_{k-2}} \varphi(K, G_1) \Delta P_{k-1}^i. \tag{16}$$

Здесь ΔP_k^i — длина k-го рабочего шага изменения i-го параметра $\mathbf{P}$ при решении ДУЧП МКЭ; v_{k-1} — скорость изменения $F(\mathbf{P})$ на $(k-1)$-м шаге поиска; $|\nabla F|_{k-1}/\sigma$ — соотношение уровней полезного сигнала и шума на $(k-1)$-м шаге поиска; σ — величина шума, зависящая от выбранного плана $[P]$, погрешности решения ДУЧП МКЭ ($\sigma_{\text{МКЭ}}$) и качества исходной информации; $\varphi(K, G_1)$ — функция, которая зависит от номера шага поиска и сложности идентифицируемого объекта (например, для ряда объектов хорошие результаты показала функция $\varphi(\cdot) = \exp(-G\sqrt{K})$).

После того как области минимумов F_j, $\forall j = \overline{1, N}$, по каждой ТК найдены, в соответствии с МПЭ в этих областях реализуются факторные планы 2-го порядка и вычисляются уравнения

$$F_j = b_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{m} b_i^{(j)} P_i + \sum_{ik} b_{ik}^{(j)} P_{ik} + \sum_{i} b_{ii}^{(j)} P_i^2, \quad \forall j = \overline{1, N}. \tag{17}$$

Часть членов уравнений (17), признанных незначимыми, исключается. При реализации плана $[P]$ 2-го порядка в пределах треугольного конечного элемента целесообразно применять полиномы (7) 2-го порядка, так как при использовании полиномов 1-го порядка возникает необходимость уменьшения пространственно-временной дискретизации при численном решении ДУЧП МКЭ.

Определить, к какой группе относится поверхность $F_j(\mathbf{P})$, можно с помощью канонического преобразования и последующего анализа уравнений

$$F_j = F_{1j} + \sum_{i=1}^{m} B_{ii} \tilde{P}_i^2, \tag{18}$$

где F_{1j} — значение критерия для j-й ТК в новом начале координат; $\tilde{P}_i$ — новые оси координат; B_{ii} — канонические коэффициенты.

Если канонический анализ сопряжен со значительными трудностями, то определяются приближенные области компромиссов V_j — приближенные области искомых параметров, оптимальные по Парето, причем $V_j^* \subset V_j$, где V_j^* — точная область решений по Парето; $\subset$ — символ включения. В этом случае поиск $\mathbf{P}$ сводится к отысканию условных минимумов $F_j(\mathbf{P})$, $\forall j = \overline{1, N}$. С использованием метода Лагранжа составляется функция поочередно для каждой ТК:

$$v_i = F_i(\mathbf{P}) + \sum_{j=1}^{N-1} L_j F_j(\mathbf{P}), \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad i \neq j. \tag{19}$$

Необходимые условия экстремума v_i дают систему $m+N-1$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_i}{\partial P_1}+\sum_{j=1}^{N-1} L_j \frac{\partial F_j(\mathbf{P})}{\partial P_1}=0; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &F=\left\{\sum_{i=1}^{S}[\Delta\Theta(\Omega, t_i)]^r \lambda(\Omega, t_i)\right\}^{1/r}, \end{aligned}\right\}$$

где L_j — множители Лагранжа; r — показатель степени критерия идентификации; S — число точек решетчатой функции $\Theta(\cdot)$; $\Delta\Theta(\Omega, t_i)=$ $=|\Theta(\Omega, t_i)-\Theta^*(\Omega, t_i)|$.

Решение системы (20) численным методом по каждой ТК с различными L_j и r позволяет выделить в пространстве искомых параметров приближенную область решений V_j, $\forall j=\overline{1, N}$. В том случае когда поверхность $F_j(\mathbf{P})$ характеризуется многоэкстремальностью, поиск V_j может выполняться с помощью модифицированного метода Лагранжа — ридж-анализа. При этом поиск V_j проводится решением следующей системы:

$$\left.\begin{aligned} &[B]-L\times[E]\times\mathbf{P}=-0{,}5\mathbf{b}; \\ &R=\left(\sum_{i=1}^{m} P_i^2\right)^{1/2}; \\ &F_j(\mathbf{P})\leqslant\varepsilon, \quad \forall j=\overline{1, N}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где $[B]$ — матрица, составленная из коэффициентов уравнений (17); $[E]$ — единичная матрица; R — радиус гиперсферы, описанной вокруг центра плана 2-го порядка.

При поиске V_j численным решением системы (21) варьируются как L_j, r, так и R.

Для получения точечного решения $\mathbf{P}$ задачи идентификации в найденной области V необходимо, как правило, введение дополнительной качественной информации I_0 об ОРП, причем процедура эта трудно поддается формализации. Следовательно, достаточно строгое решение некорректной задачи идентификации (обратной задачи) представляет собой область решений V, которая получается из V_j по каждой ТК. Представляется, что нельзя создать формальный алгоритм идентификации объектов рассматриваемого класса, который обеспечивал бы единственное решение задач идентификации.

Рассмотрим влияние шумов измерительных датчиков, которые состоят из случайных (σ) и систематических (ε) погрешностей измерения выходной переменной $\Theta(\Omega, t)$, на результат решения задачи V. С этой целью решалась серия задач идентификации параметров гипотетического ОРП, который представляет собой прямоугольник, разделенный прямолинейной границей раздела на две зоны. На внешних контурах этого объекта задавались ГУ 1-го и 3-го родо́в. Входная переменная $X(\Omega, t)$ моделировалась величиной ГУ 2-го рода в центральной точке ОРП. В качестве экспериментальных данных выходных переменных $\Theta(\Omega, t)$ принимались значения, полученные решением ДУЧП МКЭ с известными параметрами $\mathbf{P}=(P_1, P_2)$.

В том случае, когда $\varepsilon=0$, увеличение случайной составляющей σ приводит к расширению области решений, причем

$$V(\sigma_2)\subset V(\sigma_1), \quad \forall\sigma_1>\sigma_2, \tag{22}$$

т. е. область решений при больших значениях σ включает $V(\sigma_2)$, полученные при меньших значениях случайных погрешностей измерения выходных переменных ОРП.

Для вариантов решения задачи, когда случайные составляющие σ равны, при $\varepsilon \neq 0$ имеет место некоторое расширение области с одновременным смещением относительно области решения V $(\varepsilon = 0)$, причем с ростом ε происходит увеличение этого смещения.

Если присутствуют как случайная $\sigma \neq 0$, так и систематическая $\varepsilon \neq 0$ погрешность измерений $\Theta(\Omega, t)$, то для всех $\sigma_2 > \sigma_1$ имеет место соотношение $V(\sigma_1, \varepsilon = 0) \subset V(\sigma_2, \varepsilon > 0)$. При этом происходят существенное расширение и смещение области решения задач.

При идентификации неоднородных ОРП определение параметров кусочно-однородных зон с приемлемой для практики точностью возможно только в тех зонах, в которых есть хотя бы одна ТК. Например, в случае отсутствия ТК в зоне малых значений искомого параметра P_1 область решений задачи идентификации V сужается в области параметра P_1.

Таким образом, на результат идентификации V большое влияние оказывает точность измерения входных $\mathbf{X}(\Omega, t)$, выходных $\mathbf{\Theta}(\Omega, t)$ и возмущающих $\mathbf{Z}(\Omega, t)$ переменных ОРП, а также число и место расположения ТК.

Исходя из необходимой точности решения задачи идентификации $\sigma_V \leqslant 20\%$ для объектов рассматриваемого класса, определены требования к метрологическим характеристикам датчиков. При этом погрешности измерительных датчиков переменных ОРП находятся в достаточно широких пределах $\sigma_д = 0{,}1 - 5{,}0\%$.

Разработанный и кратко описанный выше алгоритм идентификации программно реализован на ФОРТРАНе для ЭВМ БЭСМ-4М [6—8]. Время решения на ЭВМ БЭСМ-4М задачи при $N = 12$, $m = 5$, $\delta = 3$, $k = 600$ составляет около 5 ч. В настоящее время ведутся работы по переводу и модернизации программ для ЕС ЭВМ. Разработанные алгоритмы и программы представляют собой основу математического обеспечения САПР и АСУ ТП применительно к объектам рассматриваемого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Успенский А. Б., Федоров В. В.** Планирование экспериментов некоторых обратных задач математической физики.— Кибернетика, 1974, № 4.
2. **Рубан А. И.** Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности.— Томск: ТГУ, 1975.
3. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.
4. **Райбман Н. С., Богданов В. О., Кнеллер Д. В.** Идентификация систем с распределенными параметрами.— Автоматика и телемеханика, 1982, № 6.
5. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1980.
6. **Павлов А. Н.** Алгоритм идентификации нестационарных объектов управления одного класса с распределенными параметрами.— В кн.: Опыт и проблемы проектирования, строительства и эксплуатации мелиоративных объектов. Астрахань: Астрахангипроводхоз, 1981.
7. **Павлов А. Н.** Алгоритм и программы идентификации параметров гидрогеологического объекта с использованием методов планирования экспериментов: Информационный листок о научно-техническом достижении. Сер. 39.— Белгород: изд. Белгородского ЦНТИ, 1980, № 5—80 НТД.
8. **Гладченко Е. С., Павлов А. Н., Парафеев В. В.** Математическое обеспечение АСКУ ТП осушения.— В кн.: Труды 17-го Междунар. симп. по применению ЭВМ и математических методов в горных отраслях промышленности. М.: ЦНИИуголь, 1980, кн. 9.

Поступила в редакцию 23 ноября 1982 г.