ция. При $N \gg r$ выражения для среднего времени и дисперсии момента фиксации упрощаются:

$$\overline{t}_{\text{сп}} \approx ((N+r+2)/3(N+1))\,\tau, \quad \sigma^2_{\text{сп}} \approx ((4(N+r)+7)/9(N+1)^2)\,\tau^2.$$

Зависимости среднего времени и СКО времени фиксации от числа пришедших на интервале $(0, \tau)$ фотоэлектронов для двух методов измерения временного положения импульса приведены на рисунке.

Предложенная методика позволяет проводить оценку точности определения временного положения импульса фотоприемником с ФЭУ при различных методах фиксации временного положения импульса с учетом реальных флуктуаций одноэлектронной характеристики ФЭУ и статистического характера сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мелешко Е. А.** Интегральные схемы в наносекундной ядерной электронике.— М.: Атомиздат, 1977.
2. **Богомолов А. А., Бугаев Ю. Н., Суетенко А. В.** Оценка точности определения временного положения светового импульса фотоприемником.— В кн.: Импульсная фотометрия. Л.: Машиностроение, 1979, вып. 6.
3. **Перцев А. Н., Писаревский А. Н.** Одноэлектронные характеристики ФЭУ и их применение.— М.: Атомиздат, 1971.
4. **Кокс Д. Р., Смит В. Л.** Теория восстановления: Пер. с англ./Под ред. Ю. К. Беляева.— М.: Сов. радио, 1967.

Поступило в редакцию 29 мая 1980 г.

УДК 681.325 : 625.376

В. Н. СИДЕЛЬНИКОВ, Р. Р. ХАМИТОВ

(Москва)

О ГРАНИЦАХ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

В задачах распознавания образов с помощью байесовских классификаторов, как правило, весьма сложен аналитический расчет вероятности ошибочной классификации P_e и важное значение приобретает поиск соотношений, задающих ее нижнюю и верхнюю границы. Эти границы должны определять возможности классификатора в зависимости от конфигурации и числа m эталонных образов (классов) $J_r(s)$, априорного распределения вероятностей этих образов P_r $(r = 1, \ldots, m)$ и условных распределений наблюдений $\mathcal{J}(s)$ (s — пространственная или временная переменная).

В литературе, посвященной этому вопросу, приводятся обычно соотношения для $m = 2$, а для $m > 2$ известны лишь верхние границы вероятности ошибочной классификации [1, 2]. Общий интерес к нахождению удобных соотношений для верхних границ обусловлен необходимостью наличия критерия оптимальности для поиска систем эффективных признаков [3, 4]. Однако для разработчиков систем распознавания весьма важной задачей становится получение двусторонних соотношений для P_e при $m > 2$. Так как нахождение границ для двухклассовой задачи обычно проще, чем для многоклассовой, то желательно, чтобы эти соотношения выражались через соотношения для границ при $m = 2$.

Пусть заданы границы для вероятности ошибочной классификации при $m = 2$:

$$g_{\text{н}}(P_1,\ P_2,\ \rho_{12}) \leqslant P_e \leqslant g_{\text{в}}(P_1,\ P_2,\ \rho_{12}), \tag{1}$$

где ρ_{12} — некоторая мера сходства образов $J_1(s)$ и $J_2(s)$, зависящая от условных распределений вероятностей $\mathcal{J}(s)$.

Для получения границ вероятности ошибки при $m > 2$ рассмотрим

$$A_{qr} = \{\mathcal{J}(s) : P[J_q(s)\,|\,\mathcal{J}(s)] \geqslant \Gamma[J_r(s)\,|\,\mathcal{J}(s)]\}$$

— множество наблюдений $\mathcal{J}(s)$, для которых в соответствии с оптимальным байесовским алгоритмом принимаем решение в пользу образа $J_q(s)$ против $J_r(s)$, а $P[J_q(s)\,|\,\mathcal{J}(s)]$ и $P[J_r(s)\,|\,\mathcal{J}(s)]$ — апостериорные вероятности образов $J_q(s)$ и $J_r(s)$. Пусть далее имеет место $J_r(s)$, тогда в соответствии с [4] для верхней границы получим

$$P_{e,r} = P\left\{\bigcup_{\substack{q=1\\ q\neq r}}^{m} A_{qr}\,|\,J_r(s)\right\} \leqslant \sum_{\substack{q=1\\ q\neq r}}^{m} P\left\{A_{qr}\,|\,J_r(s)\right\}$$

и после усреднения по всем r

$$P_e = \sum_{r=1}^{m} P_r P_{e,r} \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{\substack{q=1\\q\neq r}}^{m} P_r P\{A_{qr} \mid J_r(s)\} = \sum\sum_{q<r} \alpha$$

где

$$\alpha_{qr} = P_r P\{A_{qr}|J_r(s)\} + P_q P\{A_{rq}|J_q(s)\}.$$

Для нижней границы находим

$$P_{e,r} = P\left\{\bigcup_{\substack{q=1\\q\neq r}}^{m} A_{qr} \mid J_r(s)\right\} \geqslant \max_q P\{A_{qr} \mid J_r(s)\} \geqslant \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{q=1\\q\neq r}}^{m} P\{A_{qr} \mid J_r(s)\},$$

а для вероятности ошибки классификации получаем после усреднения по всем r

$$P_e = \sum_{r=1}^{m} P_r P_{e,r} \geqslant \frac{1}{m-1} \sum_{r=1}^{m} \sum_{\substack{q=1\\q\neq r}}^{m} P_r P\{A_{qr} \mid J_r(s)\} = \frac{1}{m-1} \sum\sum_{q<r} \alpha_{qr}.$$

Полученная здесь нижняя граница нетривиальна и равна нулю только для случая $P_e = 0$. Важно также, что обе границы удалось выразить через величину α_{qr}:

$$\frac{1}{m-1} \sum\sum_{q<r} \alpha_{qr} \leqslant P_e \leqslant \sum\sum_{q<r} \alpha_{qr},$$

что позволяет при $m > 2$ использовать неравенства (1) для $m = 2$.

Действительно, поскольку вероятности $P\{A_{qr}|J_r(s)\}$ и $P\{A_{rq}|J_q(s)\}$ зависят только от образов $J_r(s)$ и $J_q(s)$ и не зависят от числа m, то величину $\alpha_{qr}/(P_r + P_q)$ можно рассматривать как вероятность ошибочной классификации в двухклассовой задаче распознавания образов $J_r(s)$ и $J_q(s)$ с априорными вероятностями этих образов $P_r/(P_r + P_q)$ и $P_q/(P_r + P_q)$. Тогда $(P_r + P_q) g_{\text{н}}[P_r/(P_r + P_q), P_q/(P_r + P_q), \rho_{rq}] \leqslant \alpha_{qr} \leqslant (P_r + P_q) g_{\text{в}}[P_r/(P_r + P_q), P_q/(P_r + P_q), \rho_{qr}]$, а для границ вероятности ошибки классификации при $m > 2$ получим

$$\frac{1}{m-1} \sum\sum_{q<r} (P_r + P_q)\, g_{\text{н}}\left(\frac{P_r}{P_r + P_q}, \frac{P_q}{P_r + P_q}, \rho_{rq}\right) \leqslant P_e \leqslant$$
$$\leqslant \sum\sum_{q<r} (P_r + P_q) g_{\text{в}}\left(\frac{P_r}{P_r + P_q}, \frac{P_q}{P_r + P_q}, \rho_{rq}\right). \tag{2}$$

Проведем здесь расчет границ Бхаттачарийя для вероятности ошибки классификации при пуассоновских наблюдениях, когда образ $\tilde{J}(s)$ является реализацией потока точек s_i и описывается системой плотностей распределения вероятностей

$$p[\tilde{J}(s) \mid J(s)] = p[n; s_1, \ldots, s_n \mid J(s)] = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} [J(s_i) + J_{\Phi}]\, e^{-\int [J(s)+J_{\Phi}]ds}, \tag{3}$$

где интенсивность потока $\lambda(s)$ задается суммой эталонного образа $J(s)$ и фона: $\lambda(s) = J(s) + J_{\Phi}$.

Границы Бхаттачарийя для двухклассовой задачи были получены в [5]:

$$(1/2)\left[1 - \left(1 - 4P_1P_2 e^{-2\rho_{\text{в}}}\right)^{1/2}\right] \leqslant P_e \leqslant (P_1P_2)^{1/2} e^{-\rho_{\text{в}}}, \tag{4}$$

где

$$\rho_{\text{в}} = -\ln \int_{C} p\left[\tilde{J}(s) \mid J_1(s)\right]^{1/2} p\left[\tilde{J}(s) \mid J_2(s)\right]^{1/2} d\tilde{J}(s)$$

— расстояние Бхаттачарийя между образами $J_1(s)$ и $J_2(s)$. Интеграл здесь континуальный. Используя (3), найдем

$$\rho_{\text{в}} = -\ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{(n)} \prod_{i=1}^{n} \lambda_1(s_i)^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \lambda_2(s_i)^{1/2}\, ds_1 \ldots ds_n \times$$
$$\times e^{-\int \frac{\lambda_1(s)+\lambda_2(s)}{2} ds} = \frac{1}{2} \int \left[\lambda_1(s)^{1/2} - \lambda_2(s)^{1/2}\right]^2 ds$$

и, осуществив подстановку этого результата в (2) и (4), получим

$$\frac{1}{m-1}\sum_{q<r}\sum\frac{P_r+P_q}{2}\left\{1-\left[1-4\frac{P_r\,P_q}{(P_r+P_q)^2}e^{-\int[\lambda_r(s)^{1/2}-\lambda_q(s)^{1/2}]^2ds}\right]^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P_e\leqslant\sum_{q<r}\sum(P_rP_q)^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\int[\lambda_r(s)^{1/2}-\lambda_q(s)^{1/2}]^2ds}.$$

Как видно из полученного результата, вероятность ошибки распознавания и ее границы зависят не только от характера и величины искажений, но также и от числа образов, их априорных вероятностей, конфигурации, расположения и относительных размеров. Для наиболее трудных случаев распознавания, когда число образов велико, они сильно схожи, априорные вероятности их равны, отношения типа сигнал/шум малы, верхняя граница тривиальна и может достигать значения $g_в = m(m-1)/2$, а нижняя граница стремится к $g_н = 1/2$. Поэтому найденные здесь границы наилучшим образом оценивают вероятность ошибки распознавания для более легких случаев при небольших искажениях наблюдений. Обе границы при этом стремятся к нулю.

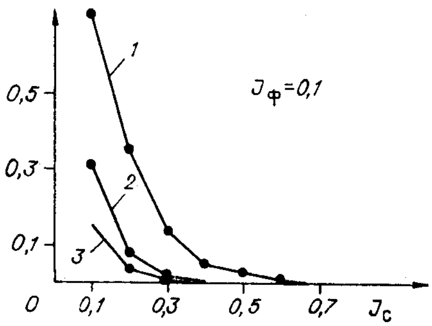

Рис. 1.

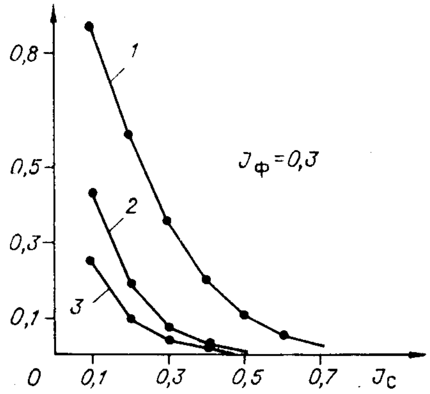

Рис. 2.

Характер поведения границ вероятности ошибки при различных соотношениях величины полезного сигнала и фона отражают графики, приведенные на рис. 1 и 2 (кривые *1*, *3*). Там же представлены графики отношения числа ошибок при распознавании образов к общему числу их пуассоновских наблюдений в эксперименте по распознаванию с помощью байесовского классификатора (кривые *2*). Эти графики были построены для задачи распознавания изображений трех ($m = 3$) геометрических фигур (круга, квадрата и эллипса) примерно равной площади. Значение интенсивности изображений внутри контуров образов принималось равным $\lambda(s) = J_с + J_ф$, а вне контура — $\lambda(s) = J_ф$. Априорные вероятности образов равнялись 1/3.

Опуская несложный расчет, приведем здесь также границы вероятности ошибочной классификации векторного образа $I = \{J(s_1), \ldots, J(s_N)\}$ при наблюдениях его в аддитивном гауссовом шуме $\tilde{I} = I + R$ с матрицей корреляции $K = R^TR$.

Для такого случая

$$\frac{1}{m-1}\sum_{q<r}\sum\frac{P_r+P_q}{2}\left\{1-\left[1-4\frac{P_rP_q}{(P_r+P_q)^2}e^{-(1/4)(I_r-I_q)K^{-1}(I_r-I_q)^T}\right]^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P_e\leqslant\sum_{q<r}\sum(P_rP_q)^{1/2}e^{-(1/8)(I_r-I_q)K^{-1}(I_r-I_q)^T}.$$

Определение и анализ этих границ для конкретного случая аналогичны приведенным выше и не вызывают затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Toussaint G. T.** Bibliography on estimation of misclassification.— IEEE Trans., 1974, vol. IT-20, p. 472—479.
2. **Kanal L.** Patterns in pattern recognition: 1968—1974.— IEEE Trans., 1974, vol. IT-20, p. 679—722.
3. **Клоков Ю. К., Сидельников В. Н., Хамитов Р. Р.** Преобразование, минимизирующее верхнюю границу вероятности ошибки классификации при пуассоновских наблюдениях.— Автометрия, 1981, № 6.
4. **Caprihan A., De Figueiredo R.** On the extraction of pattern feature from continuous measurements.— IEEE Trans., 1970, vol. SSC-6, p. 110—115.
5. **Fukunaga K.** Introduction to statistical pattern recognition.— N. Y.: Academic Press, 1972.

Поступило в редакцию 3 февраля 1982 г.;
окончательный вариант — 23 июня 1982 г.