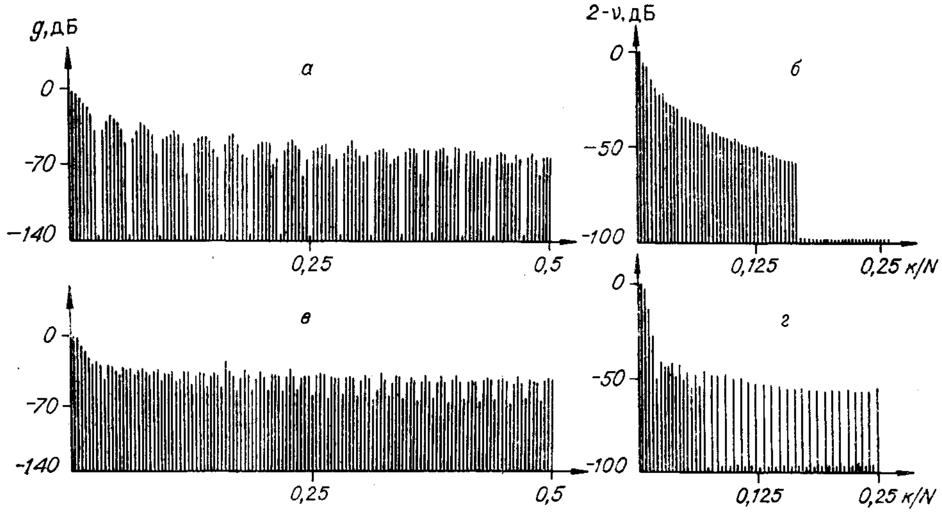

Рис. 2.

погрешностей сборки. Эти процессы содержат скрытые периодические колебания, причем условие $X(n) \in N(0, D)$ не выполняются. Однако, как показал эксперимент, погрешность формул (6), (8), (12) не превысила нескольких процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коллакот Р. А.** Диагностика механического оборудования.— Л.: Судостроение, 1980.
2. **Gibbs F. A., Gras A. M.** Frequency analysis of electroencephalograms.— Science, 1947, vol. 105, p. 132—134.
3. **Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.** Спектральный анализ случайных процессов.— М.: Энергия, 1974.
4. **Durrani T. S., Nightingale J. M.** Data window for digital spectral analysis.— Proc. IEE, 1972, vol. 119, N 3.
5. **Пономарев В. А., Тимохин В. И.** Применение временных окон в цифровом спектральном анализе случайных процессов.— В кн.: Тез. докл. VII Всесоюз. симп. «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., 1974, с. 93—96.
6. **Slepian D., Pollak H. O.** Prolate spheroidal wave functions.— Bell. Syst. Techn. J., 1961, vol. 40, p. 43—84.
7. **Голд Б., Рэйдер Ч.** Цифровая обработка сигналов.— М.: Сов. радио, 1973.
8. **Eberhard A.** An optimal discrete window for the calculation of power spectra.— IEEE Trans. Audio and Elect., 1973, vol. AU-21, N 1.

Поступила в редакцию 21 июня 1982 г.

УДК 62.501

А. А. ГАЛЬЧЕНКО, Ф. Ф. ДЕДУС

(Пущино Московской)

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ

Введение. Обработка результатов экспериментальных исследований часто сводится к задаче оценки параметров математической модели исследуемого объекта или явления. В физике, биологии, медицине и технике встречаются задачи, в которых получаемый из эксперимента процесс или сигнал описывается математической моделью вида

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{a_i t}, \qquad (1)$$

где c_i и a_i — действительные числа, имеющие определенный физический или биологический смысл.

Задача состоит в том [1, 2], чтобы по измеренным значениям $y(t)$ оценить параметры c_i и a_i, сводя к минимуму влияние шума.

Проблема оценки параметров c_i и a_i модели типа (1) решалась в работах [3—9].

В [3—5] предложен метод, основанный на преобразовании Фурье сигнала $y(t)$ и среднеквадратичном критерии точности. Основным недостатком этого метода, который резко сужает область его применения, является достаточно большая вычислительная сложность.

В работах [6, 7] описан метод, в основе которого лежит вычисление моментов от $y(t)$ вида

$$\mu_k = \int_0^T t^k y(t)\, dt. \qquad (2)$$

Этот метод менее других подвержен влиянию помех, но при $m > 2$ алгоритм идентификации становится неустойчивым, так как при $m \geqslant 3$ численное интегрирование выражения (2) может приводить к существенным ошибкам.

В статье [8] предложен способ, использующий численное интегрирование дифференциального уравнения и метод наименьших квадратов. Его недостатком является сложность применения для случаев $m > 2$ вследствие необходимости многократного интегрирования.

В [9] излагается способ оценки параметров, основанный на результатах спектрального анализа $y(t)$ по наиболее «подходящему» ортогональному базису из числа классических.

В данной статье исследуется метод оценки параметров, который, по существу, является развитием подхода [9] с учетом идей [6, 7].

Постановка задачи. Пусть математическая модель исследуемого объекта или явления определяется выражением (1). Необходимо результаты экспериментального исследования, получаемые в виде массива данных, обработать на ЭВМ по такому алгоритму, который позволил бы оценить параметры принятой математической модели с требуемой точностью.

Будем считать, что значения y_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) величины $y(t)$ измеряются через равные промежутки времени. Задача состоит в нахождении функции

$$\bar{y}(t) = \sum_{j=1}^{k \leqslant m} \gamma_j e^{\alpha_j t}, \qquad (3)$$

параметры γ_j и α_j которой при $k = m$ являются оценкой искомых параметров c_i и a_i с допустимой относительной погрешностью δ.

Критерием проверки соответствия полученных параметров γ_j и α_j модельным c_i и a_i выбран минимум среднеквадратической ошибки:

$$\text{СКО} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y}_i)^2 / N}. \qquad (4)$$

Метод взвешенных моментов. В дальнейшем под взвешенным моментом A функции $y(t)$ будем понимать следующее выражение:

$$A = \int_0^T y(t)\, e^{\beta t} dt. \qquad (5)$$

Для получения явной зависимости A от неизвестных параметров c_i и a_i функции $y(t)$ подставим в (5) выражение для $y(t)$ из (1). В результате интегрирования

$$A = \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{a_i + \beta} \left(e^{(a_i+\beta)T} - 1 \right). \tag{6}$$

Избавимся в (6) от дроби, для чего левую и правую части выражения (6) умножим на $\prod_{j=1}^{m} (a_j + \beta)$:

$$A \prod_{j=1}^{m} (a_j + \beta) = \sum_{i=1}^{m} c_i \prod_{j=1}^{m}{}' (a_j + \beta) \left(e^{(a_i+\beta)T} - 1 \right). \tag{7}$$

Здесь $\prod'$ означает, что произведение элементов с индексами $j = i$ отсутствует. Нахождение неизвестных c_i и a_i можно облегчить, если нелинейное уравнение (7) линеаризовать путем введения следующих подстановок:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^{m} a_i, \\ x_2 &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} a_i a_j, \\ &\dots\dots\dots \\ x_m &= \prod_{i=1}^{m} a_i, \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \sum_{i=1}^{m} c_i, \\ z_2 &= \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{m}{}' a_j, \\ &\dots\dots\dots \\ z_m &= \sum_{i=1}^{m} c_i \prod_{j=1}^{m}{}' a_j, \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \sum_{i=1}^{m} c_i e^{a_i T}, \\ G_2 &= \sum_{i=1}^{m} c_i e^{a_i T} \sum_{j=1}^{m}{}' a_j, \\ &\dots\dots\dots \\ G_m &= \sum_{i=1}^{m} c_i e^{a_i T} \prod_{j=1}^{m}{}' a_j, \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

где «$'$» означает, что произведение (сумма) элементов с индексами $j = i$ исключается.

Подставив (8) — (10) в (7), после преобразований будем иметь

$$A\beta^m = - \sum_{i=1}^{m} A\beta^{m-i} x_i + \sum_{i=1}^{m} \beta^{m-i} z_i - \sum_{i=1}^{m} \beta^{m-i} e^{\beta T} G_i. \tag{11}$$

Таким образом, для отыскания неизвестных c_i и a_i необходимо вначале найти неизвестные x_i, z_i и G_i.

Определение x_i, z_i и G_i, в свою очередь, приводит к необходимости наличия $3m$ линейно-независимых уравнений типа (11), что легко достигается вариацией параметра взвешенного момента β. Таким образом, получим систему линейно-независимых уравнений относительно неизвестных x_i, z_i и G_i:

$$A_j \beta_j^m = - \sum_{i=1}^{m} A_j \beta_j^{m-i} x_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_j^{m-i} z_i - \sum_{i-1}^{m} \beta_j^{m-i} e^{\beta_j T} G_i, \tag{12}$$

$j=1, 2, \ldots, 3m$. Зная решение системы (12), из (8) и (9) легко найти c_i и a_i, $i=1, 2, \ldots, m$.

Соотношения (8) определяют алгебраическое уравнение степени m

$$a^m - x_1 a^{m-1} + \ldots + (-1)^m x_m = 0, \tag{13}$$

корнями которого являются a_i $(i=1, 2, \ldots, m)$. Найденные значения a_i подставляются в соотношения (9), задающие систему линейно-независимых уравнений относительно c_i. Таким образом, решив систему уравнений (9), находим неизвестные c_i $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Предлагаемый прием обобщается и на сигналы дискретной переменной. В этом случае взвешенный момент (5) заменой интегрирования на суммирование преобразуется в дискретный момент

$$B = \sum_{i=1}^{N} y_i e^{\beta(i-1)}. \tag{14}$$

Подставим выражение для y_i из (1) в (14):

$$B = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{e^{(\beta+a_j)N} - 1}{e^{(\beta+a_j)} - 1}. \tag{15}$$

Избавимся от дроби в правой части (15), умножив для этого обе части на $\prod_{i=1}^{m}\left(e^{(\beta+a_i)} - 1\right)$. И далее, используя подстановки (8) — (10), в которых a_i заменим на e^{a_i} и T на N, и варьируя β, получим систему $3m$ линейно-независимых уравнений относительно неизвестных x_j, z_j и G_j:

$$(-1)^m B_i = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} B_i e^{\beta_i j} x_j - \sum_{j=1}^{m} e^{\beta_i (j-1)} z_j (-1)^{m-j} + \\ + \sum_{j=1}^{m} e^{\beta_i (j-1) + \beta_i N} G_j (-1)^{m-j}, \tag{16}$$

где $i=1, 2, \ldots, 3m$. Решая систему линейных уравнений (16), определим значения неизвестных x_j, z_j и G_j и далее из соотношений (8), (9), (13) вычислим c_k и a_k $(k=1, 2, \ldots, m)$.

Рекомендации по использованию метода взвешенных моментов. Теоретически любая комбинация значений β_i $(i=1, 2, \ldots, 3m)$ позволяет оценить неизвестные параметры c_j и a_j $(j=1, 2, \ldots, m)$. Однако как сами значения функции $y(t)$, так и величины вычисленных моментов A_i, B_i имеют конечные погрешности. Поэтому одним из основных требований при практическом применении метода взвешенных моментов является выбор комбинации β_i $(i=1, 2, \ldots, 3m)$, которая позволила бы при решении системы уравнений (12) свести к минимуму влияние ошибок численного интегрирования и неточности задания функции $y(t)$. Это также распространяется и на метод взвешенных дискретных моментов.

В результате обработки нескольких десятков экспериментальных процессов отобрана совокупность эмпирических правил выбора параметров β_j:

1) при выборе β_1 можно руководствоваться следующим:

а) $-G/N \leqslant \beta_1 \leqslant G/N$, б) $|\beta_1| \approx \min\limits_{i=\overline{1,m}} |a_i|$;

2) значения β_j $(j=2, 3, \ldots, 3m)$ находятся по одному из соотношений:

а) $\beta_j = \beta_1 + (j-1)H \ln[1 + (j-1)(e-1)/(3m-1)]$,

б) $\beta_j = \beta_{j-1} + \ln[1 - (3m - j + 1)(1 - e^{-H})/(3m-1)]$,

причем $|\beta_1/15| \leqslant |H| \leqslant |10\beta_1|$;

3) если $a_i < 0$, то и $\beta_j < 0$.

Такой выбор β_j и H, как правило, обеспечивает достоверность оценок неизвестных параметров c_i и a_i.

1. Погрешность измерения $y(t)$ не должна превышать допустимую погрешность в оценке искомых параметров.

2. Когда требуется учесть постоянную составляющую (т. е. если $a_m = 0$), необходимо это сделать заранее, иначе системы уравнений (12), (19) окажутся вырожденными. Число уравнений в этом случае уменьшается на 2.

3. Если $T \to \infty$, то для определения c_i и a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) достаточно $2m$ линейных уравнений в системе (12).

Описание результатов. По описанному выше алгоритму была составлена программа на языке FORTRAN-IV.

В качестве примера приведем модельную кривую $y(t) = 300e^{-0,08t} - 200e^{-0,04t} + 100e^{-0,01t}$ при $0 \leqslant t \leqslant 240$, $N = 241$.

А. Случай отсутствия помехи $\sigma = 0$. Получено решение $y(t) = 300e^{-0,08t} - 200e^{-0,04t} + 100e^{-0,01t}$ при $H = -0{,}03556$, $\beta_1 = -0{,}01667$; коэффициенты β_j при $j \geqslant 2$ найдены по схеме 2а;

Б. На $y(t)$ наложена гауссова помеха с $\sigma = 0{,}02\ y(0)$. Получено решение $y(t) = 254e^{-0,0812t} - 171e^{-0,0322t} + 114e^{-0,0105t}$ при $H = -0{,}009402$, $\beta_1 = -0{,}01282$; величины β_j ($j \geqslant 2$) найдены по схеме 2б.

Таким образом, наличие помехи вносит большую погрешность в оценку c_i.

Заключение. Подстановки (8)—(10) позволили упростить задачу, сведя ее к линейной. При этом не теряется точность оценки параметров экспоненциальных сигналов для $m \leqslant 6$.

По результатам обработки большого количества экспериментальных процессов предлагаемым способом можно сделать следующие выводы:

а) алгоритмы оценивания параметров экспоненциальных процессов и сигналов, основанные на методе взвешенных моментов, достоверно работают в условиях сравнительно высокого уровня помех для $m \leqslant 6$;

б) программный выбор комбинации β_j ($j = 1, 2, \ldots, 3m$) по двум схемам несколько усложняет алгоритм, но в то же время обеспечивает достоверную оценку параметров;

в) сравнение предлагаемого метода с ранее разработанными показывает, что в вычислительном отношении он более устойчив, чем алгоритмы из работ [3—9], и приводит к более точным результатам по сравнению, например, с [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эйнкофф П.** Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.
2. **Аналитические** самонастраивающиеся системы автоматического управления/Под ред. В. В. Солодовникова.— М.: Машиностроение, 1965.
3. **Lin T. K., Dutt J. E.** A new method for the analysis of sums of exponential decay curves.— Math. Biosci., 1974, vol. 20, p. 381—391.
4. **Gardner D. G., Gardner J. C., Laush G., Meinke W. W.** Method for the analysis of multicomponent exponential decay curves.— J. Chem. Physics, 1959, vol. 31, N 4, p. 979—986.
5. **Provencher S. W.** A Fourier method for the analysis of exponential decay curves.— Biophys. J., 1976, vol. 16, p. 27—41.
6. **Isenberg I., Dyson R. D., Hanson R.** Studies on the analysis of fluorescence decay data by the method of moments.— Biophys. J., 1973, vol. 13, p. 1090—1115.
7. **Dyson R. D., Isenberg I.** Analysis of exponential curves by a method of moments, wich special attention to sedimentation equilibrium and fluorescence decay.— Biochem., 1971, vol. 10, N 17, p. 3233—3241.
8. **Foss S. D.** A method of exponential curve fitting by numerical integration.— Biometrics, 1970, vol. 26, N 4, p. 815—821.
9. **Дедус Ф. Ф.** Чувствительность и идентификация динамических систем в пространстве коэффициентов Фурье.— В кн.: Чувствительность систем управления. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1975, т. II.

Поступила в редакцию 11 мая 1982 г.;
окончательный вариант — 24 декабря 1982 г.