

шума редуктора судового двигателя (логарифмический масштаб по оси ординат, 512 точек по частоте, $\Theta = 0, 1/4, 1/2, 3/4$). Нетрудно видеть, что применение ДПФ-II резко улучшает условия различения синусоидальных компонент.

Таким образом, предлагаемый подход к анализу стационарных дискретных процессов, заданных на конечных интервалах и содержащих гармонические компоненты, позволяет устранить паразитную амплитудную модуляцию спектра, используя вариацию параметра в ДПФ-II. При этом по сравнению со стандартным методом, с одной стороны, уменьшается требуемый объем памяти, так как исходный процесс представляется суммой гармонических составляющих.

3. Хеннан Э. Многомерные временные ряды.— М.: Мир, 1974.
4. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория.— М.: Мир, 1980.
5. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов.— М.: Энергия, 1974.
6. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1969.
7. Артоболевский Н. Н. и др. Введение в акустическую динамику машин.— М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 14 января 1982 г.

УДК 621.391.81

В. А. ПОНОМАРЕВ, О. В. ПОНОМАРЕВА

(Ижевск)

ВРЕМЕННЫЕ ОКНА ПРИ ОЦЕНКЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Цифровой спектральный анализ по экспоненциальному базису широко применяется при решении практических задач в различных областях. Так, в задачах виброакустической диагностики машин дискретное преобразование Фурье используется для выделения периодических компонентов, параметры которых являются информативными признаками при определении внутреннего состояния машины [1]. В задачах медицинской диагностики, например при исследовании состояния больного [2], важный шаг — определение главной частоты биотоков мозга. Отметим, что при практическом применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для рассмотренных задач встречается ряд проблем, среди которых выделяются паразитная амплитудная модуляция спектра, связанная с фиксированностью числа фильтров ДПФ, и размывание спектральных составляющих, обусловленное конечностью обрабатываемых реализаций. Применение параметрического ДПФ (ДПФ-II) позволяет устранить первый недостаток ДПФ, так как число фильтров ДПФ-II может быть практически любым и варьируется параметром θ :

$$g(k, \theta) = a_c^2(k, \theta) + a_s^2(k, \theta), \quad 0 \leq \theta < 1;$$

$$a_c(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cos \frac{2\pi}{N} (k + \theta) n; \quad (1)$$

$$a_s(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \sin \frac{2\pi}{N} (k+\theta) n, \quad k = \overline{0, N/2 - 1};$$

$X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, — случайный дискретный процесс, заданный на интервале в N отсчетов. В цифровом спектральном анализе случайных процессов, содержащих гармонические компоненты или мощные узкополосные возмущения, для уменьшения размывания спектральных составляющих широко используются временные окна. Они являются внутренними характеристиками процедуры вычисления спектра (например, в формуле (1), по сути дела, применяется прямоугольное окно, равное единице на интервале $\overline{0, N-1}$ и нулю во всех других точках) или введенными извне ядрами, меняющими его статистические характеристики.

В данной работе рассматриваются вопросы статистической точности оценки спектра энергетического случайного процесса, заданного на конечном интервале в N отсчетов, вычисление которого проведено методом ДПФ-П с применением временных окон.

Пусть исследуемый процесс представляет собой гауссову последовательность $X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, $\in N(0, D)$. Параметрическое дискретное преобразование Фурье последовательности $X(n)$, взвешенной временным окном $\omega(n)$, задается соотношением

$$g(k, \theta, \omega) = a_c^2(k, \theta, \omega) + a_s^2(k, \theta, \omega), \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (2)$$

где

$$a_c(k, \theta, \omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)}} \right) \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \omega(n) \cos \frac{2\pi}{N} (k+\theta) n,$$

$$a_s(k, \theta, \omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)}} \right) \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \omega(n) \sin \frac{2\pi}{N} (k+\theta) n.$$

В общем случае величины $a_c(k, \theta, \omega)$ и $a_s(k, \theta, \omega)$ зависимы, и их совместная плотность имеет следующий вид:

$$f(\mathbf{A}) = (1/2\pi)^2 \sqrt{\det T} \exp \left(-(1/2) \mathbf{A}' T^{-1} \mathbf{A} \right). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{A} = [a_c(k, \theta, \omega), a_s(k, \theta, \omega)]'$ — транспонированная вектор-строка,

$T = M[\mathbf{A}\mathbf{A}'] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$ — корреляционная матрица вектора \mathbf{A} .

Используя тригонометрические тождества

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= (1/2)(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = (1/2)(1 - \cos 2\alpha), \\ (1/2) \sin 2\alpha &= \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

найдем элементы корреляционной матрицы T :

$$\begin{aligned} t_{11} &= \text{var} [a_c(k, \theta, \omega)] = \frac{D}{2} \left[1 + \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \cos \frac{4\pi}{N} (k+\theta) n \left/ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \right. \right], \\ t_{22} &= \text{var} [a_s(k, \theta, \omega)] = \frac{D}{2} \left[1 - \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \cos \frac{4\pi}{N} (k+\theta) n \left/ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \right. \right], \\ t_{12} &= t_{21} = \\ &= \text{cov} [a_c(k, \theta, \omega), a_s(k, \theta, \omega)] = \frac{D}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \sin \frac{4\pi}{N} (k+\theta) n \left/ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \right. \right], \end{aligned}$$

так как $M[a_c(k, \theta, \omega)] = M[a_s(k, \theta, \omega)] = 0$.

В спектральном анализе статистическую устойчивость оценок энергетического спектра принято характеризовать числом степеней свободы

$$v(k, \theta, \omega) = 2M^2[g(k, \theta, \omega)] / \text{var} [g(k, \theta, \omega)],$$

поэтому найдем моменты случайной величины $g(k, \theta, \omega)$, применив метод производящих функций:

$$\varphi(u) = M[\exp[ug(k, \theta, \omega)]] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{A}) \exp[u|\mathbf{A}|^2] d\mathbf{A} = \frac{1}{(\det[I - 2uT])^2} \quad (5)$$

(I — единичная матрица).

Вычисляя первую и вторую производные производящей функции $\varphi(u)$, найдем первый и второй начальные моменты случайной величины $g(k, \theta)$:

$$\left. \frac{d\varphi(u)}{du} \right|_{u=0} = t_{11} + t_{22}, \quad \left. \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} \right|_{u=0} = 3(t_{11} + t_{22})^2 - 4(t_{11}t_{22} - t_{12}^2).$$

С учетом того, что

$$M[g(k, \theta, \omega)] = \left. \frac{d\varphi}{du} \right|_{u=0}, \quad \text{var}[g(k, \theta, \omega)] = \left[\left. \frac{d^2\varphi}{du^2} - \left(\left. \frac{d\varphi}{du} \right)^2 \right]_{u=0},$$

получим

$$v(k, \theta, \omega) = 2/[1 + R(k, \theta, \omega)], \quad (6)$$

где

$$R(k, \theta, \omega) = \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \cos \frac{4\pi}{N}(k + \theta)n \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \sin \frac{4\pi}{N}(k + \theta)n \right)^2 \right] / \left(\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \right)^2.$$

Нетрудно видеть, что при прямоугольном окне $\omega_{\pi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ число степеней свободы $v(k, \theta) = 2/[1 + \sin^2 2\pi(k + \theta)/N^2 \sin(2\pi/N)(k + \theta)]$, откуда непосредственно следует, что при $\theta = 0$ и $1/2$ число степеней свободы равно в точности двум.

Для получения состоятельных оценок энергетического спектра применяют два вида усреднения [3]: по времени и частоте. В первом случае исходная реализация $X(n)$ делится на p частей, длительность каждой из которых равна N отсчетам. Оценка энергетического спектра находится как среднее арифметическое оценок энергетического спектра, вычисленных по каждому из p отрезков:

$$g_{I,p}(k, \theta, \omega) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} g_i(k, \theta, \omega). \quad (7)$$

Полагая p и N достаточно большими, нетрудно установить, что оценки $g_i(k, \theta, \omega)$, $i = 0, p-1$, являются независимыми. Следовательно, число степеней свободы оценки $g_{I,p}(k, \theta, \omega)$ равно

$$v_{I,p}(k, \theta, \omega) = pv(k, \theta, \omega). \quad (8)$$

Второй метод усреднения (усреднение по частоте) предполагает вычисление оценки $g(k, \theta, \omega)$ по всей длине реализации $X(l)$, $l = 0, M-1$, с шагом $\Delta\theta$. В том случае, когда $m\Delta\theta = k + \theta$ ($m, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 0 \leq \theta < 1$) и шаг $\Delta\theta$ кратен интервалу анализа, для оценки $g(k, \theta, \omega)$ можно ввести обозначение $g(m\Delta\theta, \omega)$. Усредненная оценка определяется следующим соотношением:

$$g_{II,p}(m\Delta\theta, \omega) = \frac{1}{p} \sum_{i=-p/2}^{p/2} g((m+i)\Delta\theta, \omega). \quad (9)$$

Учитывая, что

$$g((m+i)\Delta\theta, \omega) = a_c^2((m+i)\Delta\theta) + a_s^2((m+i)\Delta\theta), \quad i = \overline{-p/2; p/2},$$

а совместная плотность распределения вектора

$$\mathbf{A} = [a_c((m-p/2)\Delta\theta, \omega), a_s((m-p/2)\Delta\theta, \omega), \dots, a_c((m+p/2)\Delta\theta, \omega), a_s((m+p/2)\Delta\theta, \omega)]'$$

имеет вид

$$f(\mathbf{A}) = (1/2\pi^{p+1}\sqrt{\det T}) \exp(-(1/2)\mathbf{A}'T^{-1}\mathbf{A}), \quad (10)$$

найдем производящую функцию моментов

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= M[\exp\{u g_{\Pi}(m\Delta\theta, \omega)\}] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{A}) \exp\left[\frac{u}{p} |\mathbf{A}|^2\right] d\mathbf{A} = \\ &= \frac{1}{\left[\det\left[I - \frac{2u}{p}T\right]\right]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$T = [\mathbf{A}\mathbf{A}'^T] = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{1,2(p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{2(p+1),1} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{2(p+1),2(p+1)} \end{bmatrix}.$$

Разбивая матрицу T на блочные матрицы размером 2×2 , с учетом тригонометрических тождеств (4) найдем элементы блочных матриц:

$$\begin{aligned} t_{11} &\Rightarrow \left(D/2 \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)\right) \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-j)\Delta\theta n\right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(2m+(i+j))\Delta\theta n\right] \right\}, \\ t_{22} &\Rightarrow \left(D/2 \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)\right) \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-j)\Delta\theta n\right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \cos\left[\frac{2\pi}{N}(2m+(i+j))\Delta\theta n\right] \right\}, \\ t_{12} = t_{21} &\Rightarrow \left(D/2 \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)\right) \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \sin\left[\frac{2\pi}{N}(i-j)\Delta\theta n\right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n) \sin\left[\frac{2\pi}{N}(2m+(i+j))\Delta\theta n\right] \right\}. \end{aligned}$$

Вычисляя первую и вторую производные производящей функции $\varphi(u)$, найдем первый и второй начальные моменты случайной величины $g_2(m\Delta\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(u)}{du} \Big|_{u=0} &= \frac{1}{p} \operatorname{tr}(T) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{2(p+1)} t_{ii}, \\ \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} \Big|_{u=0} &= \frac{3}{p^2} \left(\sum_{i=1}^{2(p+1)} t_{ii} \right)^2 - \frac{4}{p^2} \sum_{i=1}^{2(p+1)-1} \sum_{j=i+1}^{2(p+1)} (t_{ii}t_{jj} - t_{ij}^2). \end{aligned}$$

Следовательно, число степеней свободы $g_2(m\Delta\theta)$ равно

$$\nu_{\Pi p}(m\Delta\theta) = \left(\sum_{i=1}^{2(p+1)} t_{ii} \right)^2 \left[\left(\sum_{i=1}^{2(p+1)} t_{ii} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{2(p+1)-1} \sum_{j=1}^{2(p+1)} (t_{ii}t_{jj} - t_{ij}^2) \right]. \quad (12)$$

Таким образом, формулами (6), (8), (12) описывается статистическая устойчивость оценок спектра, полученных методом ДПФ-П с использованием временных окон.

Временные окна, применяемые в спектральном анализе, можно представить в виде следующих четырех семейств [4, 5]:

1. Алгебраическое семейство временных окон

$$\omega(n) = 1 - \left| \frac{n - (N-1)/2}{(N+1)/2} \right|^r, \quad (13)$$

$$n = \overline{0, N-1}, r = 1, 2, 3, \dots$$

2. Обобщенное косинусоидальное семейство временных окон

$$\omega(n) = \begin{cases} (1/2)(1 - \cos(2\pi nq/N)), & n = \overline{0, \text{ent}[N/2q] - 1}; \\ 1, & n = \overline{\text{ent}[N/2q], N - \text{ent}[N/2q] - 1}; \\ (1/2)(1 - \cos(2\pi nq/N)), & n = \overline{N - \text{ent}[N/2q], N - 1}, \end{cases} \quad (14)$$

где $\text{ent}[\]$ — символ операции взятия целой части.

3. Семейство временных окон Хэмминга

$$\omega(n) = 1 - 2\mu - 2\mu \cos(2\pi n/N), \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (15)$$

4. Обобщенное семейство трапецеидальных временных окон

$$\omega(n) = \begin{cases} 2(1-h)(n+1)/(N+1)(1-z) + h, & n = \overline{0, \text{ent}[(N+1)(1-z)/2] - 1}; \\ 1, & n = \overline{\text{ent}[(N+1)(1-z)/2], N - \text{ent}[(N+1)(1-z)/2] - 1}; \\ 2(1-h)(N-n)/(N+1)(1-z) + h, & n = \overline{N - \text{ent}[(N+1)(1-z)/2], N-1} \end{cases} \quad (16)$$

(h — высота платформы окна, z — отношение верхнего основания к нижнему). Отдельный класс временных окон составляют оптимальные временные окна. Под оптимальностью понимается нахождение ограниченных во времени функций, преобразования Фурье которых имеют минимальную энергию за пределами заданного интервала частот.

Математически задача нахождения оптимального временного окна в непрерывном случае формулируется следующим образом. Пусть временное окно $\omega(t)$ определено на интервале $[-T, T]$ и $W(f)$ — фурье-преобразование $\omega(t)$. Необходимо определить временное окно $\omega_{\text{опт}}(t)$, которое представляет максимум выражению

$$R_0 = \int_{-F}^F |W(f)|^2 df \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df, \quad (17)$$

где $[-F, F]$ — заданный интервал частот.

В [6] показано, что функция $\omega_{\text{опт}}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\lambda \omega(t) = \int_{-T}^T \omega(\tau) \frac{\sin 2\pi F(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau, \quad (18)$$

соответствующего максимальному собственному числу $\lambda = \lambda_{\text{max}} = R$. Для выражения $\omega_{\text{опт}}(t)$ был введен класс так называемых вытянутых сфероидальных волновых функций, имеющих достаточно сложный вид. Поэтому в [7] предложена относительно простая аппроксимация этих функций (окно Кайзера):

$$\omega_k(n) = I_0(\beta \sqrt{1 - [2n^{-(N-1)}/(N-1)]^2}) / I_0(\beta), \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (19)$$

где β — константа, определяющая компромисс между максимальным уров-

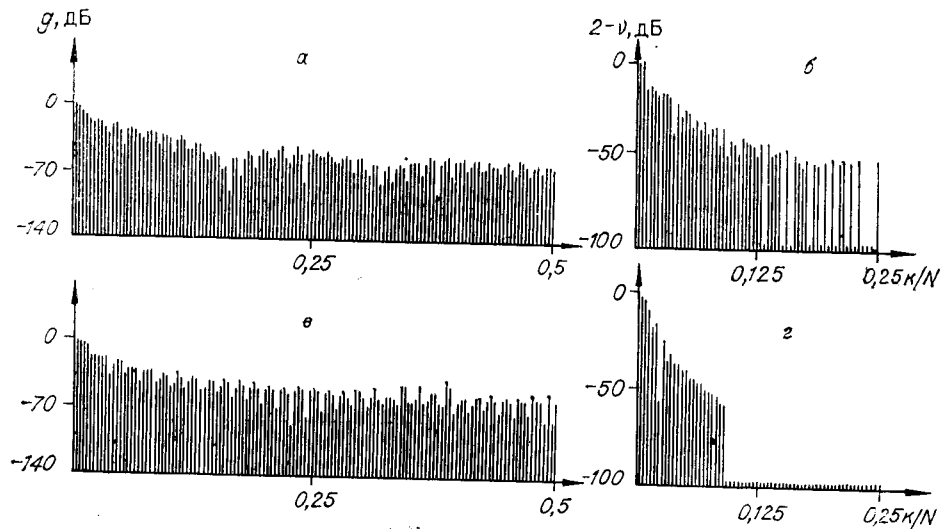


Рис. 1.

нем боковых лепестков и шириной главного лепестка фурье-преобразования временного окна. Таким образом, при данном подходе к синтезу оптимальных окон аппроксимируются непосредственно вытянутые сферои- дальные волновые функции.

Другой подход предложен Эберхардом [8]. Рассматривается аппрок- симация самого выражения (18). Показано, что оптимальное дискретное окно, максимизирующее выражение

$$R_1 = \int_{-1/N}^{1/N} |W(f)|^2 df \bigg/ \int_{-1/2}^{1/2} |W(f)|^2 df, \quad (20)$$

является собственным вектором матрицы

$$m_{rl} = \begin{cases} 2N & \text{при } r = l, \\ \left(\sin \frac{2\pi(r-l)}{N} \right) / \pi(r-l) & \text{при } r \neq l; r, l = \overline{0, N-1}, \end{cases} \quad (21)$$

соответствующим максимальному собственному числу $\lambda = \lambda_{\max} = R_1$. Недо- статок данного подхода (по сравнению с предыдущим) — отсутствие ана- литического выражения для временного окна, что приводит к необходи- мости вычисления собственных векторов матрицы (21) при различных N . Это связано со значительными затратами машинного времени и требова- нием дополнительного объема памяти для хранения окна.

На рис. 1 приведены квадраты фурье-преобразования ($N = 64$) и из- менение числа степеней свободы ($\theta = 0, 1/4, 1/2, 3/4$) для трапецидаль- ного (а, б) и алгебраического окон (в, г), на рис. 2 — для треугольного ок- на (а, б) и окна Эберхарда (в, г).

Полученные в работе результаты позволяют определять статистиче- скую точность оценки энергетического спектра случайного процесса, заданного на конечном интервале в N отсчетов, вычисление которого про- ведено методом ДПФ-П с применением временных окон. Следует отме- тить, что соотношения (6), (8), (12) могут быть применены и для случай- ных процессов, не удовлетворяющих $X(n) \in N(0, D)$ при этом с ро- стом N точность будет повышаться. С одной стороны, это объясняется известным эффектом «нормализации», с другой — возможностью аппрок- симировать оцениваемый спектр на небольшом интервале частот постоян- ной величиной. В частности, представленная методика была применена нами для оценки энергетических спектров виброакустических процессов коробок передач станков 1И611П с целью диагностики технологических

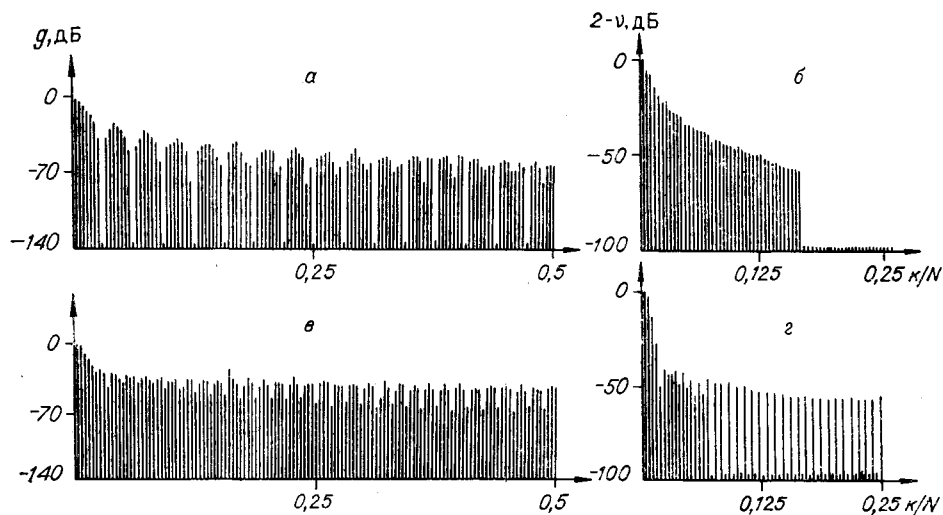


Рис. 2.

погрешностей сборки. Эти процессы содержат скрытые периодические колебания, причем условие $X(n) \in N(0, D)$ не выполняются. Однако, как показал эксперимент, погрешность формул (6), (8), (12) не превысила нескольких процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллакот Р. А. Диагностика механического оборудования.— Л.: Судостроение, 1980.
2. Gibbs F. A., Gras A. M. Frequency analysis of electroencephalograms.— Science, 1947, vol. 105, p. 132—134.
3. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов.— М.: Энергия, 1974.
4. Durrani T. S., Nightingale J. M. Data window for digital spectral analysis.— Proc. IEE, 1972, vol. 119, N 3.
5. Пономарев В. А., Тимохин В. И. Применение временных окон в цифровом спектральном анализе случайных процессов.— В кн.: Тез. докл. VII Всесоюз. симп. «Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей». Л., 1974, с. 93—96.
6. Slepian D., Pollak H. O. Prolate spheroidal wave functions.— Bell. Syst. Techn. J., 1961, vol. 40, p. 43—84.
7. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов.— М.: Сов. радио, 1973.
8. Eberhard A. An optimal discrete window for the calculation of power spectra.— IEEE Trans. Audio and Elect., 1973, vol. AU-21, N 1.

Поступила в редакцию 21 июня 1982 г.

УДК 62.501

А. А. ГАЛЬЧЕНКО, Ф. Ф. ДЕДУС

(Пушино Московской)

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ

Введение. Обработка результатов экспериментальных исследований часто сводится к задаче оценки параметров математической модели исследуемого объекта или явления. В физике, биологии, медицине и технике встречаются задачи, в которых получаемый из эксперимента процесс или сигнал описывается математической моделью вида