

6. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир, 1975.
7. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.— М.: Наука, 1977.
8. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем.— М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 9 сентября 1982 г.

УДК 621.391.81

В. А. ПОНОМАРЕВ

(Ижевск)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Для анализа стационарных дискретных случайных процессов (СДСП) широкое применение находит дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В частности, спектральный анализ по дискретным экспоненциальным функциям (ДЭФ) играет важную роль при исследовании автоматизированных систем управления технологическими процессами для анализа возмущающих и управляющих воздействий, помех измерения, величин и сложных показателей на выходе системы, для измерения параметров объекта и т. д. [1].

Важное место, которое занимает ДПФ при анализе СДСП, объясняется рядом его полезных статистических свойств, подробно исследованных в работах [2—4]. Кроме того, ДПФ может быть получено с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), что резко сокращает объем требуемых вычислений. Следует отметить и ряд проблем, возникающих при практическом применении ДПФ к анализу СДСП [5]. В частности, одной из проблем является паразитная амплитудная модуляция спектра (эффект «частотокола»), причина которой заключается в строго фиксированном наборе частот фильтров, соответствующих коэффициентам ДПФ. Если СДСП содержит гармонические составляющие, частоты которых не совпадают с сеткой частот ДПФ, то оценка параметров периодических компонент проводится с большой погрешностью.

Естественным обобщением ДПФ является параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П), использующее разложение СДСП по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций

$$\text{def } p(k, n, \Theta) = \exp[-j(2\pi/N)(k + \Theta)n], \quad n = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{0, N-1}, \\ 0 \leq \Theta < 1.$$

Пара преобразований ДПФ-П задается следующими соотношениями:

$$S(k, \Theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k + \Theta) n\right], \quad (1)$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k, \Theta) \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (k + \Theta) n\right], \quad (2)$$

где $S(k, \Theta)$ — коэффициенты ДПФ-П.

Из определения ДПФ-П следует, что набор анализируемых частот, в отличие от стандартного ДПФ, не является фиксированным, а варьируется параметром Θ . Кроме того, можно показать, что коэффициенты ДПФ-П так же, как и коэффициенты ДПФ, могут быть вычислены быстрыми алгоритмами.

Задача данной работы — исследование вероятностных свойств оценки энергетического спектра стационарного дискретного процесса, заданного $N = 2^p$ ($p = 1, 2, \dots$) отсчетами и полученного с помощью параметрического дискретного преобразования Фурье. В пределах спектрально-корреляционной теории существуют два подхода к анализу таких процессов [4].

В первом из них отрезок СДСП интерпретируется как случайный вектор $\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$ N -мерного линейного пространства. Корреляционная матрица вектора \mathbf{X} является конечной теплицевой матрицей

$$K_X = M[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = D_X \begin{bmatrix} 1 & \rho_X(1) & \cdot & \rho_X(N-2) & \rho_X(N-1) \\ \rho_X(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_X(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_X(N-2) & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_X(1) \\ \rho_X(N-1) & \rho_X(N-2) & \cdot & \rho_X(1) & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрица K_X — положительно-определенная, симметрическая, вещественная матрица, поэтому ее собственные значения вещественны и положительны, а собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Таким образом, если Φ_X — матрица собственных векторов матрицы K_X , то

$$\Phi_X^T K_X \Phi_X = \text{diag}[\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}]. \quad (4)$$

Вектор собственных чисел $\lambda = [\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}]^T$ представляет собой оценку энергетического спектра отрезка СДСП $X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в пространстве собственных векторов корреляционной матрицы K_X . В том случае когда матрица собственных векторов известна, энергетический спектр может быть получен с помощью дискретного варианта разложения Карунена — Лозва. Действительно, преобразование $\Phi_X^T \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ переводит коррелированный вектор \mathbf{X} в некоррелированный \mathbf{Y} , поэтому

$$K_Y = M[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] = \text{diag}[\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}]. \quad (5)$$

Существенным недостатком этого метода является необходимость определения собственных векторов матрицы K_X , которые очень сложным образом зависят от коэффициентов корреляции $\rho_X(i)$, $i = \overline{0, N-1}$.

Во втором подходе для упрощения структуры матрицы собственных векторов Φ_X предполагается, что заданный отрезок СДСП $X(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, есть один период циклического СДСП:

$$X(n + kN) = X(n), \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \quad (6)$$

Сдвиговые свойства циклического СДСП характеризуются циркулянтной матрицей

$$C_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X} M_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{X} M_0^{N-1} \end{bmatrix},$$

где M_0^k , $k = \overline{1, N-1}$, — матрица, осуществляющая циклический сдвиг вектора \mathbf{X} на один элемент:

$$M_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \text{ и т. д.}$$

Корреляционная матрица циклического СДСП является циркулянтной, положительно-определенной матрицей:

$$K_{X,0} = M \left[\frac{1}{N} C_0 C_0^T \right] = D \begin{bmatrix} 1 & \rho_0(1) & \rho_0(2) & \cdot & \rho_0(N-1) \\ \rho_0(N-1) & 1 & \rho_0(1) & \cdot & \rho_0(N-2) \\ \rho_0(N-2) & \rho_0(N-1) & 1 & \cdot & \rho_0(N-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_0(1) & \rho_0(2) & \rho_0(3) & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\rho_0(m) = \rho_0(N-m)$.

Известно [4], что матрица собственных векторов $\Phi_{X,0}$ циркулянтной матрицы $K_{X,0}$ равна (с точностью до постоянного множителя) матрице ДПФ F_N : $\Phi_{X,0} = (1/\sqrt{N})F_N$. Следовательно случайный вектор $Y_0 = \Phi_{X,0} \times X = (1/\sqrt{N})F_N X$ — вектор с некоррелированными составляющими, и оценка энергетического спектра СДСП может быть получена, минуя этап построения корреляционной матрицы (7):

$$g_0 = (1/N)|F_N X|^2, \quad M[g_0] = G_0,$$

G_0 — энергетический спектр циклического СДСП.

Таким образом, спектральный анализ при данном подходе существенно упрощается, так как могут быть применены методы ДПФ, для вычисления которого существуют быстрые процедуры. Однако такой подход к анализу СДСП обладает и рядом недостатков. Можно показать, что нормированные корреляционные функции СДСП и образованного из него циклического СДСП связаны между собой соотношением

$$\rho_0(m) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \rho_X(m - rN) b(m, N), \quad (8)$$

где

$$b(m, N) = \begin{cases} 1 - |m|/N, & |m| \leq N-1, \\ 0, & |m| > N-1. \end{cases}$$

Следовательно, статистические свойства циклического и исходного СДСП совпадают лишь при $N \rightarrow \infty$. С другой стороны, если СДСП содержит гармонические составляющие, частоты которых не совпадают с набором частот ДПФ, то оценка параметров периодических компонент проводится с большой погрешностью.

В данной работе предлагается третий подход к анализу СДСП, заданного на интервале в N отсчетов, который свободен от указанных недостатков и является обобщением второго метода. Под параметрической циклическостью процесса будет понимать процесс вида

$$X_\Theta(n) = X(n \bmod N) \exp \{j2\pi\Theta \text{ent}[n/N]\}, \quad (9)$$

$\text{ent}[\]$ — символ взятия целой части числа. При $\Theta = 0$ параметрическая циклическость определяет обычный циклический процесс (6). Сдвиговые свойства параметрического циклического СДСП характеризуются параметрической циркулянтной матрицей

$$C_\Theta = \begin{bmatrix} X \\ X M_\Theta \\ \cdot \\ X M_\Theta^{N-1} \end{bmatrix}.$$

Здесь M_{Θ}^k , $k = \overline{1, N-1}$, — матрица, осуществляющая параметрический циклический сдвиг вектора X на один элемент:

$$M_{\Theta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ e^{-j2\pi\Theta} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\Theta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ e^{-j2\pi\Theta} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & e^{-j2\pi\Theta} & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

Корреляционная матрица параметрического циклического СДСП является положительно-определенной, параметрической циркулянтной матрицей

$$K_{X,\Theta} = M \left[\frac{1}{N} C_{\Theta} C_{\Theta}^T \right] =$$

$$= D \times \begin{bmatrix} 1 & \rho_{\Theta}(1) & \rho_{\Theta}(2) & \cdot & \rho_{\Theta}(N-1) \\ \rho_{\Theta}(N-1) e^{-j2\pi\Theta} & 1 & \rho_{\Theta}(1) & \cdot & \rho_{\Theta}(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{\Theta}(1) e^{-j2\pi\Theta} & \rho_{\Theta}(2) e^{-j2\pi\Theta} & \rho_{\Theta}(3) e^{-j2\pi\Theta} & \cdot & 1 \end{bmatrix},$$

где $\rho_{\Theta}(m) = \rho_{\Theta}(N-m) \exp[-j2\pi\Theta]$.

ДПФ-П — собственное преобразование параметрической циркулянтной матрицы

$$F_{N,\Theta} C_{\Theta} F_{N,\Theta}^{-1} = \text{diag } S^*(k, \Theta).$$

Здесь $F_{N,\Theta}$ — матрица ДЭФ-П. Действительно, учитывая свойство ассоциативности матриц, $F_{N,\Theta} C_{\Theta} F_{N,\Theta}^{-1} = F_{N,\Theta} (C_{\Theta} F_{N,\Theta}^{-1}) = F_{N,\Theta} [S_{ij}]^*$.

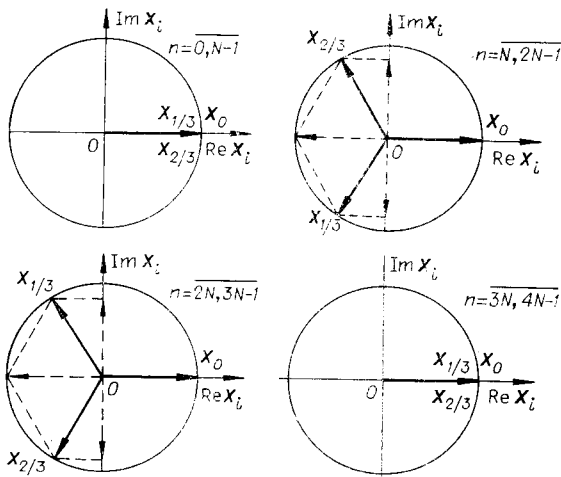
Так как строки матрицы $[S_{ij}]^*$ представляют собой коэффициенты обратного ДПФ-П строк матрицы C_{Θ} , то с учетом теоремы сдвига в частотной области $F_{N,\Theta} C_{\Theta} F_{N,\Theta}^{-1} = F_{N,\Theta} F_{N,\Theta}^{-1} \text{diag } S^*(k, \Theta) = \text{diag } S^*(k, \Theta)$, что и требовалось доказать.

Следовательно, оценка энергетического спектра, представляющая собой ДПФ-П корреляционной матрицы параметрического, циклического СДСП $F_{N,\Theta} K_{X,\Theta} F_{N,\Theta}^{-1} = \text{diag } G(k, \Theta)$ может быть получена непосредственно:

$$g_{\Theta} = (1/N) |F_{N,\Theta} X|^2, \quad M[g_{\Theta}] = G_{\Theta}, \quad (10)$$

где $g_{\Theta} = [g(0, \Theta), g(1, \Theta), \dots, g(N-1, \Theta)]^T$, $G_{\Theta} = [G(0, \Theta), G(1, \Theta), \dots, G(N-1, \Theta)]^T$.

Основное достоинство предлагаемого подхода (по сравнению с существующими) — возможность



эффективного анализа СДСП, заданных на интервале N и дополненных N_r , $r = 1, 2, \dots$, нулевыми отсчетами. Интерес к анализу процессов такого вида связан с тем, что их корреляционные функции не являются результатом наложения во временной области (8). Циклический СДСП с периодом $N(r+1)$ может быть представлен как сумма параметрических циклических процессов с периодами в

Рис. 1.

$N(r+1)$ отсчетов и значениями параметров $\Theta = (0, 1/(r+1); \dots; r/(r+1))$. Рис. 1 иллюстрирует процесс построения циклического СДСП, дополненного $2N$ нулями, в виде суммы трех параметрических циклических процессов при $\Theta = 0, 1/3, 2/3$. Отметим, что анализ циклических СДСП, дополненных нулевыми отсчетами, может быть проведен в рамках и второго подхода. Однако при этом, во-первых, резко возрастает требуемый объем памяти, во-вторых, проводятся избыточные вычисления, в-третьих, число нулевых интервалов фиксировано. Например, при использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье по основанию 2 $r = 2^i - 1, i = 1, 2, \dots$

Рассмотрим вероятностные свойства коэффициентов ДПФ-П процесса $X(n), n = 0, N-1$, который представляет собой дискретный белый шум с нормальной плотностью распределения и параметрами $M[X(n)] = 0; \text{var}[X(n)] = D$. С учетом того, что процесс $X(n)$ действительный, оценку его энергетического спектра представим в следующем виде:

$$g(k, \Theta) = d_c^2(k, \Theta) + d_s^2(k, \Theta).$$

$$\text{Здесь } d_c(k, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cos \frac{2\pi}{N}(k + \Theta)n,$$

$$d_s(k, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \sin \frac{2\pi}{N}(k + \Theta)n, \quad k = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (11)$$

В общем случае коэффициенты ДПФ-П $d_c(k, \Theta), d_s(k, \Theta)$ коррелированы, и их совместная плотность распределения задается соотношением

$$f(d_c, d_s) = 1/2\pi \sqrt{t_{11}t_{22} - t_{12}^2} \times \\ \times \exp \left[- (t_{22}d_c^2 - 2t_{12}d_c d_s + t_{11}d_s^2) / 2(t_{11}t_{22} - t_{12}^2) \right], \quad (12)$$

где $t_{11}, t_{22}, t_{12} = t_{21}$ — элементы корреляционной матрицы величин d_c и d_s . С помощью тригонометрических тождеств

$$\cos^2 \alpha = (1/2)(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = (1/2)(1 - \cos 2\alpha), \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos 2nx = \cos x (N-1) \sin Nx / \sin x, \quad (13) \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sin 2nx = \sin x (N-1) \sin Nx / \sin x$$

несложно установить, что

$$M[d_c(k, \Theta)] = M[d_s(k, \Theta)] = 0, \\ t_{11} = (D/2)[1 + F(k + \Theta) \cos (2\pi/N)(k + \Theta)(N-1)], \\ t_{22} = (D/2)[1 - F(k + \Theta) \cos (2\pi/N)(k + \Theta)(N-1)], \\ t_{12} = t_{21} = (D/2)[1 - F(k + \Theta) \cos (2\pi/N)(k + \Theta)(N-1)], \quad (14)$$

$F(x) = \sin 2\pi x/N \sin (2\pi/N)x$. Из соотношений (14) непосредственно следует, что при значении параметра $\Theta = 0, 1/2$ коэффициенты ДПФ-П $d_c(k, \Theta)$ и $d_s(k, \Theta)$ независимы и их дисперсии равны $D/2$. В спектральном анализе статистическую устойчивость оценок энергетического спектра принято характеризовать числом степеней свободы

$$v(k, \Theta) = 2M^2[g(k, \Theta)] / \text{var}[g(k, \Theta)]. \quad (15)$$

Найдем моменты величины $g(k, \Theta)$, воспользовавшись методом производящих функций:

$$\varphi(u) = M[\exp(ug(k, \Theta))] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(d_c, d_s) e^{u(d_c^2 + d_s^2)} dd_c dd_s. \quad (16)$$

Подставляя (12) в (16) и используя интеграл вида [6]

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)\Psi(x,y)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{I_2}} e^{-I_3/2I_2},$$

где $\Psi(x, y) = d_{11}x^2 + 2d_{12}xy + d_{22}y^2 + 2d_{13}x + 2d_{23}y + d_{33}$,

$+ t_{22} + 4u^2(t_{11}t_{22} - t_{12}^2)$. Вычисляя первую и вторую производные производящей функции, найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $g(k, \Theta)$:

$$M[g(k, \Theta)] = \left. \frac{d\varphi(u)}{du} \right|_{u=0} = \frac{t_{11} + t_{22} - 4(t_{11}t_{22} - t_{12}^2)u}{\sqrt{[1 - 2u(t_{11} + t_{22}) + 4u^2(t_{11}t_{22} - t_{12}^2)]^3}} \Big|_{u=0} = \\ = t_{11} + t_{22} = D;$$

$$\text{var}[g(k, \Theta)] = \left[\left. \frac{d^2\varphi(u)}{du^2} - \left(\frac{d\varphi(u)}{du} \right)^2 \right] \Big|_{u=0} = D^2 [1 + F^2(k + \Theta)],$$

откуда

$$v(k, \Theta) = 2 \sqrt{1 + \frac{\sin^2 2\pi(k + \Theta)}{N^2 \sin^2(2\pi/N)(k + \Theta)}}. \quad (17)$$

Как и следовало ожидать, при $\Theta = 0$, $1/2$ число степеней свободы в точности равно двум.

Полученные результаты могут быть использованы при анализе случайных процессов со скрытыми периодичностями, например в задачах виброакустической диагностики механизмов. Действительно, акустические сигналы многих машин характеризуются наличием гармонических рядов разнообразной природы. Так, в вибрационном или шумовом сигнале редуктора можно выделить ряды из гармоник оборотной, зубцовой, циклической частот [7]. Используя выражения (11) и (17), можно найти оценку спектра практически на любой частоте и определить ее статистическую устойчивость. Для иллюстрации на рис. 2 приведены спектры, полученные с помощью ДПФ (а) и ДПФ-П (б), записи акустического

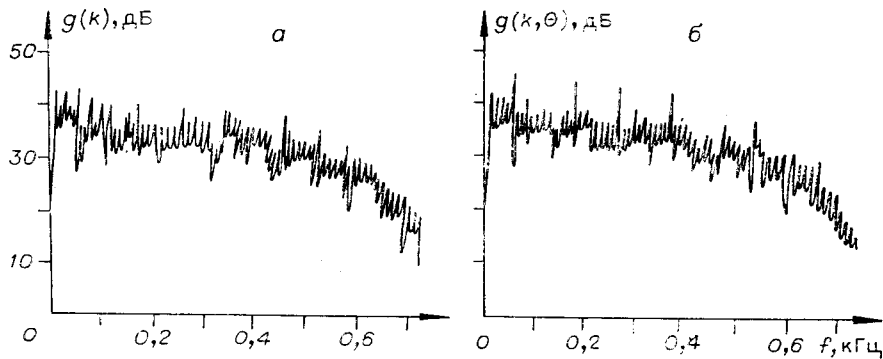


Рис. 2.

шума редуктора судового двигателя (логарифмический масштаб по оси ординат, 512 точек по частоте, $\Theta = 0, 1/4, 1/2, 3/4$). Нетрудно видеть, что применение ДПФ-II резко улучшает условия различения синусоидальных компонент.

Таким образом, предлагаемый подход к анализу стационарных дискретных процессов, заданных на конечных интервалах и содержащих гармонические компоненты, позволяет устранить паразитную амплитудную модуляцию спектра, используя вариацию параметра в ДПФ-II. При этом по сравнению со стандартным методом, с одной стороны, уменьшается требуемый объем памяти, так как исходный процесс представляется суммой гармонических составляющих.

3. Хеннан Э. Многомерные временные ряды.— М.: Мир, 1974.
4. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория.— М.: Мир, 1980.
5. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов.— М.: Энергия, 1974.
6. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1969.
7. Артоболевский Н. Н. и др. Введение в акустическую динамику машин.— М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 14 января 1982 г.

УДК 621.391.81

В. А. ПОНОМАРЕВ, О. В. ПОНОМАРЕВА

(Ижевск)

ВРЕМЕННЫЕ ОКНА ПРИ ОЦЕНКЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Цифровой спектральный анализ по экспоненциальному базису широко применяется при решении практических задач в различных областях. Так, в задачах виброакустической диагностики машин дискретное преобразование Фурье используется для выделения периодических компонентов, параметры которых являются информативными признаками при определении внутреннего состояния машины [1]. В задачах медицинской диагностики, например при исследовании состояния больного [2], важный шаг — определение главной частоты биотоков мозга. Отметим, что при практическом применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для рассмотренных задач встречается ряд проблем, среди которых выделяются паразитная амплитудная модуляция спектра, связанная с фиксированностью числа фильтров ДПФ, и размывание спектральных составляющих, обусловленное конечностью обрабатываемых реализаций. Применение параметрического ДПФ (ДПФ-II) позволяет устранить первый недостаток ДПФ, так как число фильтров ДПФ-II может быть практически любым и варьируется параметром θ :

$$g(k, \theta) = a_c^2(k, \theta) + a_s^2(k, \theta), \quad 0 \leq \theta < 1;$$

$$a_c(k, \theta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cos \frac{2\pi}{N} (k + \theta) n; \quad (1)$$