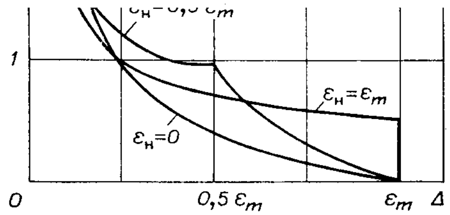
оскольку интегралы, соответствующие этим законам, не берутся в элементарных функциях, исследования проводились численными методами. Анализ показывает, что характер изменения плотности распределения погрешности $W(\Delta)$ для указанных законов $W_{\varepsilon}(\varepsilon)$ аналогичен кривым на рисунке. При отсутствии априорной информации о процессе как предельный случай можно рекомендовать (8), являющееся оценкой сверху.



В заключение отметим, что изложенная методика может быть использована также для оценки методических погрешностей статистических анализаторов экстремумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жулев В. И., Садовский Г. А., Шлигерский Б. М.** Исследование методической погрешности статистических анализаторов экстремумов.— В кн.: Тез. докл. VII Всесоюз. симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., 1974, кн. 3, с. 154—159.
2. **Жулев В. И., Петухов В. И., Садовский Г. А.** Статистический анализатор амплитуд выбросов.— В кн.: Труды Рязанского радиотехн. ин-та. Сер. Автоматизация измерений, 1974, вып. 49, с. 10—17.
3. **Авербух Г. Ю., Розов Ю. Л., Челпанов И. Б.** О погрешности измерения максимальных значений стационарного случайного процесса дискретными методами.— Автометрия, 1973, № 2.
4. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1974, кн. 1.

Поступила в редакцию 5 июля 1982 г.;
окончательный вариант — 23 ноября 1982 г.

УДК 519.24

Н. С. ДЕМИН, Л. И. ЖАДАН

(Томск)

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРОЦЕДУРЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение. На практике возникают ситуации, когда нормальная работа измерительных устройств нарушается появлением аномальных измерений, связанных с воздействием атмосферных, искусственных помех, с отказом чувствительных элементов приемных и измерительных устройств. В таких случаях, как правило, аномальные измерения выбрасывались и основное внимание уделялось задаче обнаружения моментов появления аномальных измерений, а вопрос об оптимальности подобной процедуры оставался в стороне [1—3]. В данной работе для класса измерительных систем, работающих по методу Калмана [4], рассмотрен один частный случай, для которого доказана оптимальность процедуры выбрасывания аномальных измерений.

Постановка задачи. Итак, пусть работа некоторой динамической системы характеризуется n-мерным вектором состояния $x(t)$ (время дискретное), описываемым уравнением

$$x(t+1) = \Phi(t)x(t) + w(t) \quad (t = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $\Phi(t)$ — переходная матрица системы размерностью $(n \times n)$; $w(t)$ — n-мерный гауссовый вектор помех с $M\{w(t)\} = 0$ и $M\{w(t)w^{\mathrm{T}}(\tau)\} = Q(t)\delta_{t\tau}$ ($M\{\cdot\}$ — математическое ожидание, т — транспонирование, $\delta_{t\tau}$ — символ Кронекера). Начальное распределение вектора состояния системы предполагается гауссовым с параметрами $\bar{x}_0$ и P_0. Нормальная работа измерительного устройства, выходом которого является m-мерный вектор $z^0(t)$ вида

$$z^0(t) = H^0(t)x(t) + v(t) \tag{2}$$

($v(t)$ — m-мерный вектор гауссовых (регулярных) помех, не зависимых от $w(t)$, с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R^0(t)$), характеризуется матрицей $H^0(t)$ размерностью $m \times n$ $(m \leqslant n)$. В этом случае, как известно [4], оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{x}(t)$ вектора $x(t)$ формируется фильтром Калмана с матрицами $H^0(t)$ и $R^0(t)$.

Пусть по r каналам (r компонентам вектора наблюдений) действуют аномальные помехи $(r \leqslant m)$. Тогда в соответствии с процедурой отбрасывания аномальных помех в устройстве оценивания должен использоваться $(m-r)$-мерный вектор измерений $z(t)$, который получается из вектора $z^0(t)$ выбрасыванием тех компонент, в которых присутствуют аномальные измерения(пусть номера этих компонент $i_1, i_2, \ldots, i_r$). Таким образом, в этом случае $\hat{x}(t)$ будет вырабатываться фильтром Калмана с матрицей наблюдений $H(t)$ размерностью $(m-r) \times n$, получаемой из матрицы $H^0(t)$ вычеркиванием строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$, и матрицей ковариаций $R(t)$ размерностью $(m-r) \times (m-r)$, которая получается из матрицы $R^0(t)$ вычеркиванием строк и столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$, т. е. фильтром, описываемым соотношениями:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t)[z(t) - H(t)\hat{x}(t|t-1)], \tag{3}$$

$$\hat{x}(t|t-1) = \Phi(t-1)\hat{x}(t-1), \tag{4}$$

$$K(t) = P(t|t-1)H^{\mathrm{T}}(t)S^{-1}(t), \tag{5}$$

$$S(t) = H(t)P(t|t-1)H^{\mathrm{T}}(t) + R(t), \tag{6}$$

$$P(t|t-1) = \Phi(t-1)P(t-1)\Phi^{\mathrm{T}}(t-1) + Q(t-1), \tag{7}$$

$$P(t) = [I_n - K(t)H(t)]P(t|t-1). \tag{8}$$

В формулах (3)—(8) и далее I_α — единичная матрица размерностью $\alpha \times \alpha$. Возникает вопрос: в каком случае фильтр (3)—(8) является оптимальным и какого свойства эта оптимальность?

Основной результат. Считаем, что аномальные помехи действуют аддитивно с гауссовыми помехами $v(t)$. Как правило, природа аномальных помех такова, что априорные данные о них самые минимальные. Обозначим r-мерный вектор аномальных помех через $f(t)$, относительно которого сделаем следующие предположения: 1) распределение $f(t)$ произвольное; 2) математическое ожидание $\bar{f}(t) = M\{f(t)\}$ неизвестно; 3) ковариационная матрица $\Gamma(t)$ вектора $f(t)$ задана.

Теорема. Пусть $m = n$ и $H^0(t) = I_n$. Тогда фильтр (3)—(8) является оптимальным в смысле минимума среднеквадратической ошибки в классе линейных несмещенных фильтров.

Доказательство. В [5] для системы (1) с каналом измерения вида

$$\bar{z}(t) = H^0(t)x(t) + v(t) + C(t)f(t) \tag{9}$$

было показано, что если $f(t)$ удовлетворяет наложенным выше трем ограничениям, то несмещенная и оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка в классе линейных оценок определяется соотношениями:

$$\hat{x}(t) = \Phi(t-1)\hat{x}(t-1) + \tilde{K}_1(t)[\bar{z}(t) - \Phi(t-1)\hat{x}(t-1)], \tag{10}$$

$$\widetilde{K}_1(t) = P(t\,|\,t-1)\,\overline{S}_1^{-1}(t)\left[I_n - C(t)\,V_1(t)\,C^{\text{т}}(t)\,\overline{S}_1^{-1}(t)\right], \tag{11}$$

$$\overline{S}_1(t) = \overline{S}(t) + C(t)\Gamma(t)C^{\text{т}}(t), \tag{12}$$

$$\overline{S}(t) = P(t|t-1) + R^0(t), \tag{13}$$

$$V_1(t) = \left[C^{\text{т}}(t)\,\overline{S}_1^{-1}(t)\,C(t)\right]^{-1}, \tag{14}$$

$$P(t|t-1) = \Phi(t-1)P(t-1)\Phi^{\text{т}}(t-1) + Q(t-1), \tag{15}$$

$$P(t) = [I_n - \widetilde{K}_1(t)]P(t|t-1). \tag{16}$$

Здесь $\overline{z}(t)$ — n-мерный вектор измерений; $H^0(t) = I_n$; $v(t)$ — n-мерный вектор гауссовых помех с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариаций $R^0(t)$ размерностью $(n\times n)$. Матрица $C(t)$ размерностью $(n\times r)$ определяет структуру воздействия компонент аномальной помехи $f(t)$ на компоненты вектора $\overline{z}(t)$ и принадлежит множеству $C_{n\times r}(0,\ 1)$ булевых матриц, у которых в каждом столбце только по одной единице и нет строк, содержащих больше одной единицы, причем единица стоит в 1-м столбце на i_1-м месте, во 2-м столбце на i_2-м месте и т. д., в r-м столбце на i_r-м месте. Для доказательства теоремы необходимо установить эквивалентность фильтров (3)—(8) и (10)—(16). Последнее равносильно доказательству того, что

$$K(t)\widetilde{z}(t) = \widetilde{K}_1(t)\widetilde{\widetilde{z}}(t),$$

или

$$P(t\,|\,t-1)\,H^{\text{т}}(t)\,S^{-1}(t)\,\widetilde{z}(t) = P(t\,|\,t-1)\,\overline{S}_1^{-1}(t)\times$$
$$\times\left(I_n - C(t)\left(C^{\text{т}}(t)\,\overline{S}_1^{-1}(t)\,C(t)\right)^{-1}C^{\text{т}}(t)\,\overline{S}_1^{-1}(t)\right)\widetilde{\widetilde{z}}(t). \tag{17}$$

Предполагается, что $r < n$, т. е. в каждый момент времени имеется хотя бы одна компонента вектора наблюдений, на которую не воздействует аномальная помеха, так как в противном случае задача теряет содержательный смысл.

По построению $H(t)$ и $C(t)$

$$H(t)C(t) = 0_{(n-r)\times n}. \tag{18}$$

В (18) и далее $0_{\alpha\times\beta}$ — нулевая матрица размерностью $\alpha\times\beta$. Введем обозначения:

$$\widetilde{z}(t) = z(t) - H(t)\Phi(t-1)\widehat{x}(t-1),\ \widetilde{\widetilde{z}}(t) = \overline{z}(t) - \Phi(t-1)\widehat{x}(t-1).$$

В дальнейшем для сокращения записи будем опускать индексы времени, значения которых не вызывают сомнения. Так как $R = HR^0H^{\text{т}}$, то

$$S = H\overline{S}H^{\text{т}}. \tag{19}$$

Учитывая (19) и выражение $\widetilde{z}(t) = H\widetilde{\widetilde{z}}(t)$, преобразуем (17) к следующему виду:

$$H^{\text{т}}\left(H\overline{S}H^{\text{т}}\right)^{-1}H = \overline{S}_1^{-1}\left(I_n - C\left(C^{\text{т}}\overline{S}_1^{-1}C\right)^{-1}C^{\text{т}}\overline{S}_1^{-1}\right). \tag{20}$$

Применяя к $\overline{S}_1^{-1}$ и $C^{\text{т}}\overline{S}_1^{-1}C$ матричное тождество [6]

$$\left(A + UV^{\text{т}}\right)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(I + V^{\text{т}}A^{-1}U\right)^{-1}V^{\text{т}}A^{-1},$$

получим выражения

$$\overline{S}_1^{-1} = \overline{S}^{-1} - \overline{S}^{-1}C\Gamma\left(I_r + C^{\text{т}}\overline{S}^{-1}C\Gamma\right)^{-1}C^{\text{т}}\overline{S}^{-1},$$
$$C^{\text{т}}\overline{S}_1^{-1}C = \left(\left(C^{\text{т}}\overline{S}^{-1}C\right)^{-1} + \Gamma\right)^{-1}.$$

Делая простые преобразования в последнем выражении, найдем

$$C\Gamma C^{\text{т}} = C\left(C^{\text{т}}\overline{S}_1^{-1}C\right)^{-1}C^{\text{т}} - C\left(C^{\text{т}}\overline{S}^{-1}C\right)^{-1}C^{\text{т}}. \tag{21}$$

Из (12) и (21) следует, что

$$\bar{S}_1 = \bar{S} + C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}} - C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}},$$

или

$$\bar{S}_1 - C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}} = \bar{S} - C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}. \tag{22}$$

Перепишем равенство (22) в виде

$$\bar{S}_1(\bar{S}_1^{-1} - \bar{S}_1^{-1}C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1})\bar{S}_1 = \bar{S}(\bar{S}^{-1} - \bar{S}^{-1}C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1})\bar{S}. \tag{23}$$

Подставляя (12) в левую часть равенства (23) и проводя ряд простых преобразований, имеем

$$\bar{S}_1(\bar{S}_1^{-1} - \bar{S}_1^{-1}C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1})\bar{S}_1 = \bar{S}(\bar{S}_1^{-1} - \bar{S}_1^{-1}C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1})\bar{S}. \tag{24}$$

Из сравнения (24) с правой частью равенства (23) следует, что

$$\bar{S}_1^{-1} - \bar{S}_1^{-1}C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}_1^{-1} = \bar{S}^{-1} - \bar{S}^{-1}C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}. \tag{25}$$

Из (11), (16) и (25) видно, что матрица передачи фильтра $\tilde{K}_1(t)$ и ковариационная матрица $P(t)$ не зависят от матрицы $\Gamma(t)$.

Таким образом, с учетом (25) доказательство (20) свелось к доказательству того, что

$$H^{\mathrm{T}}(H\bar{S}H^{\mathrm{T}})^{-1}H = \bar{S}^{-1}(I_n - C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}),$$

или

$$\bar{S}^{-1}(\bar{S}H^{\mathrm{T}}(H\bar{S}H^{\mathrm{T}})^{-1}H + C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}) = \bar{S}^{-1}. \tag{26}$$

Введем обозначения:

$$A_1 = \bar{S}H^{\mathrm{T}}(H\bar{S}H^{\mathrm{T}})^{-1}H,\ A_2 = C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}.$$

Тогда в силу (18)

$$A_1A_2 = 0_{n\times n},\ A_2A_1 = 0_{n\times n}. \tag{27}$$

Согласно [7]

$$rk(AB) = rk(A^+AB) = rk(ABB^+), \tag{28}$$

где $rk(\cdot)$ — ранг матрицы, A^+ — псевдообратная матрица к A. Учитывая (28) и соотношения $HH^+ = I_{n-r}$, $C^+C = I_r$, получим, что $rk(A_1) = n - r$, $rk(A_2) = r$. Легко показать, что матрицы A_1 и A_2 являются проекционными [8]. Действительно,

$$A_1^2 = \bar{S}H^{\mathrm{T}}(H\bar{S}H^{\mathrm{T}})^{-1}H\bar{S}H^{\mathrm{T}}(H\bar{S}H^{\mathrm{T}})^{-1}H = A_1,$$

$$A_2^2 = C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1} = A_2.$$

Применяя лемму 7.4 [8] к проекционным матрицам A_1 и A_2, для которых выполняются соотношения (27) и $rk(A_1) + rk(A_2) = n$, получим, что

$$\bar{S}H^{\mathrm{T}}(H\bar{S}H^{\mathrm{T}})^{-1}H + C(C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}\bar{S}^{-1} = I_n.$$

Последнее означает, что (26) справедливо, следовательно, фильтры (3)—(8) и (10)—(16) эквивалентны. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Микешина Н. Г.** Выявление и исключение аномальных данных.— Заводская лаборатория, 1966, № 3.
2. **Зелененький П. П.** Применение методов теории статистических решений при исключении аномальных измерений.— Техн. кибернетика, 1969, № 2.
3. **Киричук В. С., Луценко Б. Н.** Исключение недостоверных данных.— Автометрия, 1970, № 6.
4. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Энергия, 1973.
5. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Адаптивная фильтрация дискретных стохастических сигналов.— В кн.: VIII Всесоюз. конф. по теории кодирования и передачи информации. Москва — Куйбышев: НТО РЭС им. А. С. Попова, 1981, ч. V.

6. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир, 1975.
7. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.— М.: Наука, 1977.
8. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем.— М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 9 сентября 1982 г.

УДК 621.391.81

В. А. ПОНОМАРЕВ

(Ижевск)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Для анализа стационарных дискретных случайных процессов (СДСП) широкое применение находит дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В частности, спектральный анализ по дискретным экспоненциальным функциям (ДЭФ) играет важную роль при исследовании автоматизированных систем управления технологическими процессами для анализа возмущающих и управляющих воздействий, помех измерения, величин и сложных показателей на выходе системы, для измерения параметров объекта и т. д. [1].

Важное место, которое занимает ДПФ при анализе СДСП, объясняется рядом его полезных статистических свойств, подробно исследованных в работах [2—4]. Кроме того, ДПФ может быть получено с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), что резко сокращает объем требуемых вычислений. Следует отметить и ряд проблем, возникающих при практическом применении ДПФ к анализу СДСП [5]. В частности, одной из проблем является паразитная амплитудная модуляция спектра (эффект «частокола»), причина которой заключается в строго фиксированном наборе частот фильтров, соответствующих коэффициентам ДПФ. Если СДСП содержит гармонические составляющие, частоты которых не совпадают с сеткой частот ДПФ, то оценка параметров периодических компонент проводится с большой погрешностью.

Естественным обобщением ДПФ является параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П), использующее разложение СДСП по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций

$$\operatorname{def} p(k,\ n,\ \Theta) = \exp[-j(2\pi/N)(k+\Theta)n],\quad n=\overline{0,\ N-1},\ k=\overline{0,\ N-1},$$
$$0 \leqslant \Theta < 1.$$

Пара преобразований ДПФ-П задается следующими соотношениями:

$$S(k, \Theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(k+\Theta)\,n\right], \tag{1}$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k, \Theta) \exp\left[j\frac{2\pi}{N}(k+\Theta)\,n\right], \tag{2}$$

где $S(k,\ \Theta)$ — коэффициенты ДПФ-П.

Из определения ДПФ-П следует, что набор анализируемых частот, в отличие от стандартного ДПФ, не является фиксированным, а варьируется параметром Θ. Кроме того, можно показать, что коэффициенты ДПФ-П так же, как и коэффициенты ДПФ, могут быть вычислены быстрыми алгоритмами.