АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 4 1983

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

УДК 621.317.3

В. И. ЖУЛЕВ, Г. А. САДОВСКИЙ
(Рязань)

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Экспериментальное определение статистических характеристик экстремумов случайных процессов цифровыми устройствами основано на измерении их значений по дискретным отсчетам. В [1, 2] исследованы погрешности измерения и анализа законов распределения экстремальных значений для гармонической модели сигнала в области локальных экстремумов. Полученные результаты отражают предельные значения погрешностей для сигналов с заданным динамическим диапазоном и граничной частотой спектра. В [3] рассмотрен общий подход к оценке погрешностей измерения экстремумов, однако сложность найденных соотношений ограничивает их пригодность для практического использования.

Более конкретные результаты могут быть получены с учетом законов распределения производных случайного процесса. Измерение экстремальных значений по дискретным отсчетам осуществляется путем сравнения трех соседних выборок. За экстремальное значение стационарного случайного процесса $x(t)$ принимается значение $x(t_k)$ с погрешностью по амплитуде $\Delta = x(t_k) - x(t_m)$ и фазе $\lambda = t_k - t_m$, где t_m — момент существования экстремума, t_k — момент ближайшей к экстремуму выборки.

Разложим сигнал в области экстремального значения в ряд Тейлора, ограничиваясь тремя членами разложения *:

$$\hat{x}(t) = x(t_m) + \dot{x}(t_m)(t - t_m) + (\ddot{x}(t_m)/2!)(t - t_m)^2,$$

где $\dot{x}(t_m)$ и $\ddot{x}(t_m)$ — соответственно 1-я и 2-я производные процесса в моменты экстремумов.

Так как в соответствии с условием существования экстремумов $\dot{x}(t_m) = 0$, то погрешность измерения

$$\Delta = (\ddot{x}(t_m)/2!)(t_k - t_m)^2. \tag{1}$$

Преобразуем выражение (1) к более удобному для дальнейшего анализа виду:

$$\Delta = (\ddot{x}(t_m)/2!)h^2(t_k - t_m)^2/h^2 = 4\varepsilon\xi^2. \tag{2}$$

Здесь $\xi = (t_k - t_m)/h = \lambda/h$ — относительное значение фазовой погрешности; $\varepsilon = (\ddot{x}(t_m)/8)h^2$ — максимальное возможное значение погрешности измерения локального экстремума; h — период дискретизации.

В общем случае закон распределения фазовой погрешности неизвестен. Однако, как показано в [3], дисперсия фазовой погрешности регистрации максимумов в первом приближении пропорциональна квадрату периода дискретизации и не зависит от конкретного вида корреляционных функций, а ее среднее значение равно нулю, что соответствует

---

* В дальнейшем погрешностью аппроксимации будем пренебрегать, т. е. считать вблизи экстремума $\hat{x}(t) = x(t)$.

равномерному закону распределения. В связи с этим будем считать, что фазовая погрешность λ распределена равномерно с плотностью $W_\lambda(\lambda) = 1/h$ в интервале дискретизации $[-h/2;\ h/2]$. Тогда

$$W_\xi(\xi) = 1,\ -1/2 < \xi < 1/2. \tag{3}$$

Представим в соответствии с (2) погрешность измерения экстремумов в виде произведения двух случайных величин:

$$\Delta = \varepsilon\eta, \tag{4}$$

где $\eta = 4\xi^2$ — функция фазовой погрешности.

Так как моменты экстремумов t_m и дискретных отсчетов t_k статистически независимы, а распределение второй производной $\ddot{x}(t_m)$ в моменты экстремумов совпадает с безусловным распределением второй производной $\ddot{x}(t)$ [3], то для стационарных случайных процессов значения ε и η, являющиеся функциями соответственно величин $\ddot{x}(t_m)$ и λ, можно считать независимыми.

Обратная функция $\xi(\eta)$ двузначная: $\xi_{1,2} = \pm(1/2)\sqrt{\eta}$. С учетом плотности распределения (3) по общему правилу нахождения распределения функционально связанных случайных величин после элементарных преобразований

$$W_\eta(\eta) = \sum_{i=1}^{2} \frac{W_\xi(\xi_i)}{\left|\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_i}} = \frac{1}{2\sqrt{\eta}},\quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{5}$$

Распределение величины ε с учетом постоянного множителя $h^2/8$ совпадает с распределением второй производной $\ddot{x}(t_m)$. Тогда распределение погрешности измерения как произведения случайных величин в общем виде может быть представлено интегралом

$$W(\Delta) = \int_\varepsilon \frac{W_\varepsilon(\varepsilon)\, W_\eta(\Delta/\varepsilon)}{\left|\frac{d\Delta}{d\eta}\right|}\, d\varepsilon. \tag{6}$$

Подставляя в выражение (6) значения производной из соотношения (4) и плотности распределения функции $W_\eta(\eta)$ (5), получим

$$W(\Delta) = \int_\varepsilon \frac{W_\varepsilon(\varepsilon)}{2\varepsilon\sqrt{\Delta/\varepsilon}}\, d\varepsilon = \int_\varepsilon \frac{W_\varepsilon(\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon\Delta}}\, d\varepsilon. \tag{7}$$

Математическое ожидание m_Δ и дисперсия σ_Δ^2 погрешности, вычисленные по плотности распределения (7), имеют следующий вид:

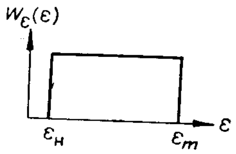
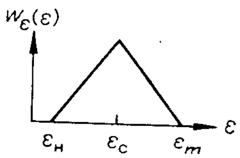
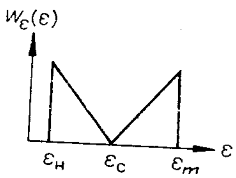
$$m_\Delta = m_\varepsilon/3, \qquad \sigma_\Delta^2 = \left(4m_\varepsilon^2 + 9\sigma_\varepsilon^2\right)/45,$$

где m_ε и σ_ε^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия величины ε.

Определение законов распределения второй производной случайных процессов в моменты экстремальных значений — особая задача, требующая самостоятельного решения. Отметим только, что для узкополосных процессов плотность распределения второй производной в области локальных экстремумов совпадает с распределением огибающей [4]. Это позволяет указать некоторые модели сигналов с типовыми распределениями второй производной в моменты экстремумов. Например, узкополосный случайный процесс с равномерным законом распределения огибающей соответствует гармонической функции, модулированной сигналом треугольной формы.

Результаты исследования для равномерного, треугольного и антимодального законов распределения второй производной $\ddot{x}(t_m)$ сведены в таблицу.

Особый интерес представляет случай, когда $\varepsilon_н = \varepsilon_m$. Он соответствует гармонической модели сигнала $x(t) = x_m \sin\omega_в t$, описывающей реаль-

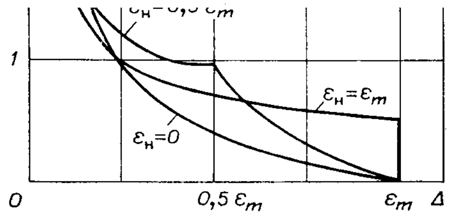
Порядковый номер	Вид закона $W_\varepsilon(\varepsilon)$	Выражение для плотности распределения $W(\Delta)$
1		$W(\Delta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_m-\varepsilon_н}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_m-\varepsilon_н}{\lvert\Delta\rvert}}, & 0\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\varepsilon_н,\\ \dfrac{1}{\varepsilon_m-\varepsilon_н}\left[\sqrt{\dfrac{\varepsilon_m}{\lvert\Delta\rvert}}-1\right], & \varepsilon_н\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\varepsilon_m\end{cases}$
2		$W(\Delta)=$ $=\begin{cases}\dfrac{8\left[\sqrt{2\varepsilon_m^3}-\sqrt{(\varepsilon_m+\varepsilon_н)^3}+\sqrt{2\varepsilon_н^3}\right]}{3(\varepsilon_m-\varepsilon_н)^2\sqrt{2\lvert\Delta\rvert}}, & 0\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\varepsilon_н,\\ \dfrac{8\left[\sqrt{2\varepsilon_m^3}-\sqrt{(\varepsilon_m+\varepsilon_н)^3}+\frac{3}{2}\varepsilon_н\sqrt{2\lvert\Delta\rvert}-\frac{1}{2}\sqrt{2\lvert\Delta\rvert^3}\right]}{3(\varepsilon_m-\varepsilon_н)^2\sqrt{2\lvert\Delta\rvert}}, & \varepsilon_н\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\dfrac{\varepsilon_m+\varepsilon_н}{2},\\ \dfrac{8\left[\sqrt{2\varepsilon_m^3}-\frac{3}{2}\varepsilon_m\sqrt{2\lvert\Delta\rvert}+\frac{1}{2}\sqrt{2\lvert\Delta\rvert^3}\right]}{3(\varepsilon_m-\varepsilon_н)^2\sqrt{2\lvert\Delta\rvert}}, & \dfrac{\varepsilon_m+\varepsilon_н}{2}\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\varepsilon_m\end{cases}$
3		$W(\Delta)=$ $=\begin{cases}\dfrac{4}{3(\varepsilon_m-\varepsilon_c)^2\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times\\ \times\left[\sqrt{\varepsilon_m^3}+4\sqrt{\varepsilon_c^3}-3\varepsilon_c(\sqrt{\varepsilon_m}+\sqrt{\varepsilon_н})+\sqrt{\varepsilon_н^3}\right], & 0\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\varepsilon_н,\\ \dfrac{4}{3(\varepsilon_m-\varepsilon_c)^2\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times\\ \times\left[\sqrt{\varepsilon_m^3}+4\sqrt{\varepsilon_c^3}-3\varepsilon_c(\sqrt{\varepsilon_m}+\sqrt{\lvert\Delta\rvert})+\sqrt{\lvert\Delta\rvert^3}\right], & \varepsilon_н\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\varepsilon_c,\\ \dfrac{4}{3(\varepsilon_m-\varepsilon_c)^2\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}\times\\ \times\left[\sqrt{\varepsilon_m^3}-3\varepsilon_c(\sqrt{\varepsilon_m}-\sqrt{\lvert\Delta\rvert})-\sqrt{\lvert\Delta\rvert^3}\right], & \varepsilon_c\leqslant\lvert\Delta\rvert\leqslant\varepsilon_m\end{cases}$

ный процесс с конечным динамическим диапазоном и граничной частотой $\omega_в$. Для такой модели сигнала плотность распределения погрешности

$$W(\Delta)=2/\omega_в h\sqrt{2x_m\lvert\Delta\rvert}. \qquad (8)$$

Последнее выражение совпадает с результатом, полученным в [1] для выбросов, представимых функцией косинуса. Для процесса с равномерным законом распределения второй производной на рисунке приведены зависимости $W(\Delta)$ при $\varepsilon_н=0$, $\varepsilon_н=0{,}5\varepsilon_m$, $\varepsilon_н=\varepsilon_m$. Очевидно, что во всех других случаях характер изменения $W(\Delta)$ будет аналогичен кривой со значением $\varepsilon_н=0{,}5\varepsilon_m$.

Изложенная методика может применяться для определения характеристик погрешности измерения экстремумов случайных процессов, имепоскольку интегралы, соответствующие этим законам, не берутся в элементарных функциях, исследования проводились численными методами. Анализ показывает, что характер изменения плотности распределения погрешности $W(\Delta)$ для указанных законов $W_{\varepsilon}(\varepsilon)$ аналогичен кривым на рисунке. При отсутствии априорной информации о процессе как предельный случай можно рекомендовать (8), являющееся оценкой сверху.



В заключение отметим, что изложенная методика может быть использована также для оценки методических погрешностей статистических анализаторов экстремумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жулев В. И., Садовский Г. А., Шлигерский Б. М.** Исследование методической погрешности статистических анализаторов экстремумов.— В кн.: Тез. докл. VII Всесоюз. симпозиума «Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей». Л., 1974, кн. 3, с. 154—159.
2. **Жулев В. И., Петухов В. И., Садовский Г. А.** Статистический анализатор амплитуд выбросов.— В кн.: Труды Рязанского радиотехн. ин-та. Сер. Автоматизация измерений, 1974, вып. 49, с. 10—17.
3. **Авербух Г. Ю., Розов Ю. Л., Челпанов И. Б.** О погрешности измерения максимальных значений стационарного случайного процесса дискретными методами.— Автометрия, 1973, № 2.
4. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1974, кн. 1.

Поступила в редакцию 5 июля 1982 г.;
окончательный вариант — 23 ноября 1982 г.

УДК 519.24

Н. С. ДЕМИН, Л. И. ЖАДАН
(Томск)

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРОЦЕДУРЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Введение. На практике возникают ситуации, когда нормальная работа измерительных устройств нарушается появлением аномальных измерений, связанных с воздействием атмосферных, искусственных помех, с отказом чувствительных элементов приемных и измерительных устройств. В таких случаях, как правило, аномальные измерения выбрасывались и основное внимание уделялось задаче обнаружения моментов появления аномальных измерений, а вопрос об оптимальности подобной процедуры оставался в стороне [1—3]. В данной работе для класса измерительных систем, работающих по методу Калмана [4], рассмотрен один частный случай, для которого доказана оптимальность процедуры выбрасывания аномальных измерений.

Постановка задачи. Итак, пусть работа некоторой динамической системы характеризуется n-мерным вектором состояния $x(t)$ (время дискретное), описываемым уравнением