УДК 621.391.2

Ю. Н. ОВЧАРОВ

(Ленинград)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПРАВИЛ НЕКОГЕРЕНТНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА В ШУМАХ НЕИЗВЕСТНОГО УРОВНЯ

При некогерентном обнаружении нефлуктуирующего сигнала на фоне нормального шума неизвестной интенсивности широко используются критерии, критическая область которых не зависит от уровня шума [1]. Различия в постановке, условиях и методах решения задачи приводят к использованию различных решающих правил. Одним из способов сравнения их по эффективности является вычисление так называемых коэффициентов асимптотической относительной эффективности (КАОЭ), которые для алгоритмов, использующих асимптотически нормальные статистики, находятся из выражения [1]

$$\rho_{1,2}=\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2,\quad \varepsilon_{1,2}=\lim_{n}\left\{\frac{\partial^m M\{t_{1,2}\mid q\}}{\partial q^m}\Bigg|_{q=0}\Bigg/\sqrt{nD_{1,2}}\right\},\tag{1}$$

где $M\{\cdot\mid q\}$ — математическое ожидание при условии q; $t_{1,2}$ — решающие статистики сравниваемых критериев; q — полезный параметр распределения решающих статистик; m — наименьший порядок ненулевых производных; $D_{1,2}$ — дисперсии решающих статистик при гипотезе H_0 об отсутствии сигнала; n — размер выборки.

КАОЭ сравниваемых критериев равен предельному отношению размеров выборок при равенстве мощностей решающих правил, причем при $\rho_{1,2}<1$ второй критерий эффективнее первого.

В работе [2] проведено сравнение по этому принципу ряда алгоритмов: Прокофьева [3], простого и логарифмического контрастов. Рассмотренные алгоритмы соответствуют двухвыборочной задаче, т. е. ситуации, когда подразумевается наличие двух выборок — рабочей и обучающей (шумовой) — одинакового размера. В настоящей работе рассмотрена несколько иная задача: каждому элементу x_j рабочей выборки $\{x_j\}_{j=1}^N$ соответствует своя обучающая выборка шума $\{y_{ij}\}_{i=1}^n$. При этом, как и в [2], предполагается, что элементы выборок статистически независимы, причем y_{ij} подчиняются закону распределения Рэлея, а элементы x_j рабочей выборки имеют либо плотность распределения Рэлея (при гипотезе H_0), либо плотность распределения Рэлея — Райса (при гипотезе H_1 о присутствии сигнала) с отношением сигнал/шум по мощности q_j.

Можно показать, что наиболее мощный инвариантный к мощности шума критерий для данной задачи имеет вид

$$\prod_{j=1}^{N}{}_1F_1\left(n+1,1;q_j\frac{\lambda_j}{1+\lambda_j}\right)\geqslant C,\ \lambda_j=x_j^2\Bigg/\sum_{i=1}^{n}y_{ij}^2,\tag{2}$$

где ${}_1F_1(n,\ k;\ x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [4]. Очевидно, что равномерно наиболее мощного критерия не существует. В работе [5] рассмотрен локально наиболее мощный инвариантный критерий

$$\Lambda=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\geqslant C,\ C=\mathrm{const}.\tag{3}$$

Статистика λ_j подчиняется нецентральному F-распределению [6]

$$f_q(x)=e^{-q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q_k}{k!}\frac{\Gamma(k+1+n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)}x^k\frac{1}{(1+x)^{n+k+1}}\tag{4}$$

с параметром нецентральности q, взятым для простоты одинаковым для любых значений j, что не снижает общности. Учитывая, что в условиях известной мощности шума оптимальной процедурой некогерентного обнаружения является правило

$$\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2\geqslant C,\tag{5}$$

из распределения (4) легко найти выражение для КАОЭ алгоритма (3) по сравнению с алгоритмом (5):

$$\rho_\Lambda=(n-2)/n<1,\ n>2.\tag{6}$$

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	∞
ρ_Λ	—	—	0,333	0,5	0,6	0,667	0,714	1,0
ρ_L	0,304	0,437	0,49	0,518	0,537	0,549	0,557	0,608

Видно, что при $n \to \infty$ локально наиболее мощный (ЛНМ) алгоритм (3) столь же эффективен, что и оптимальный для известной мощности шума.

Рассмотрим критерий, основанный на логарифмическом контрасте:

$$L = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \ln \lambda_j \geqslant C. \tag{7}$$

Из распределения (4) для λ_j можно получить выражения для математического ожидания и дисперсии статистики L:

$$M\{L\} = \begin{cases} \psi(1) - \psi(n), & H_0; \\ e^{-q}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{q^k}{k!}\,\psi(k+1) - \psi(n), & H_1; \end{cases}$$

$$D\{L\} = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\Big[\zeta(2) - \zeta(2, n)\Big], & H_0; \\ \dfrac{1}{N}\Big\{\zeta(2, n) + e^{-q}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{q^k}{k!}\Big[\psi^2(k+1) + \zeta(2, k+1) - \\ \quad - \psi(k+1)\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{q^i}{i!}\psi(i+1)\Big]\Big\}, & H_1\ldots \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\psi(n)$ — ψ-функция Эйлера [4]; $\zeta(k)$, $\zeta(k, n)$ — ζ-функции Римана первого и второго рода соответственно [4]. Тогда по формуле (1) находим КАОЭ алгоритма (7) по сравнению с (5):

$$\rho_L = 1/(\zeta(2) + \zeta(2, n)). \tag{9}$$

В табл. 1 приведены значения ρ_Λ и ρ_L в зависимости от n. Из таблицы видно, что при $n \to \infty$ эффективность алгоритма (7) хуже, чем алгоритма (3), примерно на 2,15 дБ. Однако можно заметить, что алгоритм логарифмического контраста эффективнее ЛНМ-алгоритма при $n < 5$. Это наводит на мысль найти алгоритм, сочетающий в себе преимущества каждого из этих алгоритмов.

Для этого рассмотрим еще раз выражение (2). Для вырожденной гипергеометрической функции справедливы выражения [4]

$$n\,{}_1F_1(n+1, 1; x) = (x + 2n - 1)\,{}_1F_1(n, 1; x) + (1-n)\,{}_1F_1(n-1, 1; x),$$
$${}_1F_1(a, a, x) = e^x. \tag{10}$$

Воспользовавшись этими формулами, можно получить

$${}_1F_1(n+1, 1, x) = e^x \sum_{i=0}^{n} \frac{(n)_i}{(i!)^2}\, x^i, \tag{11}$$

где $(n)_i = n(n-1)\ \ldots\ (n-i+1)$, $0 < i \leqslant n$; $(n)_0 = 1$. При $q \sim 1/n$, что является условием малости отношения сигнал/шум,

$${}_1F_1(n+1,\ 1,\ q\lambda_j/(1+\lambda_j)) = (1 + nq\lambda_j/(1+\lambda_j)) \sim (1 + \lambda_j/(1+\lambda_j)), \tag{12}$$

и критерий, основанный на этом приближении, будет иметь вид

$$\prod_{j=1}^{N} (1 + \lambda_j/(1+\lambda_j)) \geqslant C. \tag{13}$$

Еще более упрощая правило решения и применяя монотонное преобразование, получим следующий критерий обнаружения:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{N} \ln(1+\lambda_j) \geqslant C. \tag{14}$$

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	∞
$\rho_{\Phi\Lambda}$	—	—	1,68	1,28	1,16	1,1	1,07	1,0
$\rho_{\Phi L}$	0,823	1,02	1,14	1,23	1,29	1,33	1,37	1,65

Ясно, что при малом n величина λ_j «статистически» велика и величина $\ln(1+\lambda_j)$ близка по свойствам к величине $\ln\lambda_j$. При $n\to\infty$ λ_j становится статистически малой, так что $\ln(1+\lambda_j)\sim\lambda_j$, т. е. можно предположить, что алгоритм (14) близок к желаемому.

Используя выражение (4) и табличные интегралы [4], можно найти

$$M\{\ln(1+\lambda_j)\}=e^{-q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{k!}[\psi(k+n+1)-\psi(n)],$$
$$D\{\ln(1+\lambda_j)\}_{H_0}=1/n^2. \tag{15}$$

Тогда в соответствии с выражением (1) КАОЭ алгоритма (14) по сравнению с алгоритмом (5) имеет значение

$$\rho_\Phi=n^2/(n+1)^2. \tag{16}$$

При $n\to\infty$ $\rho_\Phi\to1$, т. е. критерий (14) столь же эффективен, что и оптимальный для известной мощности шума алгоритм. Сравнивая (14) и правила (3) и (7), получим

$$\rho_{\Phi,\Lambda}=n^3/(n-2)(n+1)^2,\ n>2;\quad \rho_{\Phi,L}=n^2\ [\zeta(2)+\zeta\ (2,n)]/(n+1)^2. \tag{17}$$

В табл. 2 приведены значения этих величин в зависимости от n. Из таблицы видно, что критерий (14) эффективнее алгоритмов логарифмического контраста и ЛНМ, хотя и предполагает несколько более сложную реализацию. Таким образом, найденная процедура близка к правилу, требования к которому были сформулированы ранее.

Проведенное рассмотрение показало, что алгоритм логарифмического контраста, проигрывая при большом n ЛНМ-алгоритму, обладает большей эффективностью при малых размерах обучающих выборок. Это делает предпочтительным его использование по сравнению с ЛНМ-алгоритмом при обнаружении сигналов в условиях быстрых изменений интенсивности шума.

Найденная процедура (14) имеет большую эффективность по сравнению с обоими упомянутыми выше правилами. Поэтому в том случае, когда соображения аппаратурной реализации не имеют главенствующего значения, предпочтение следует отдавать этому алгоритму.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1976, кн. 3.
2. **Никитин Я. Ю., Филимонов Р. П., Шубина Е. П.** Расчет асимптотической относительной эффективности некоторых инвариантных правил обнаружения в системах двухканальной обработки.— Автометрия, 1978, № 2.
3. **Прокофьев В. Н.** Инвариантное правило некогерентного обнаружения сигнала на фоне шумов неизвестного уровня.— Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 3.
4. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
5. **Васильев К. К.** Цифровое обнаружение некогерентных импульсных сигналов при изменяющейся мощности шума.— Изв. высш. учебн. заведений. Сер. Радиоэлектроника, 1978, т. 21, № 7.
6. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез.— М.: Наука, 1979.

Поступило в редакцию 21 апреля 1981 г.