

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 681.2.08 : 519.2

С. Я. АВРАМЕНКО
(Ленинград)

**ПОГРЕШНОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ
ЛОКАЛЬНЫМ КУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ**

Интерполяция случайных функций сплайнами [1, 2] используется в настоящее время для экономного размещения в памяти ЭВМ геодезической, геологической и метеорологической информации, для регистрации случайных процессов, измеренных в дискретные моменты времени, и т. п. Серьезной проблемой при этом является выбор интервала разбиения h по заданной погрешности интерполяции. Для детерминированных функций имеются зависимости, выражающие максимальную ошибку интерполяции через интервал разбиения и максимальные производные интерполируемой функции. В частности, для локального кубического сплайна (сплайна дефекта 2) получена оценка [3]

$$|f(x) - S(f, x)| < h^4 \max |f^{(4)}(x)| / 384, \quad (1)$$

где $f(x)$ — интерполируемая функция; $S(f, x)$ — кубический сплайн, интерполирующий $f(x_i)$ на равномерной сетке с интервалом разбиения $h = x_{i+1} - x_i$. Применение оценки (1) и ей подобных к случайной функции $\xi(x)$ неэффективно, так как максимальные значения ее производных теоретически бесконечны; поэтому назначение для них каких-либо предельных значений сопряжено с большим произволом. В данной работе найдены дисперсии ошибок интерполяции ординаты и производной стационарной нормальной и дифференцируемой случайной функции $\xi(x)$ локальным кубическим сплайном $S(x) \equiv S(\xi, x)$:

$$D_0(h) = \overline{[\xi(x) - S(x)]^2}, \quad (2)$$

$$D_1(h) = \overline{[\xi'(x) - S'(x)]^2} \quad (3)$$

(здесь и далее черта сверху означает статистическое усреднение). С помощью выражений (2) и (3) задача выбора h по заданным среднеквадратическим ошибкам интерполяции решается однозначно. Заметим, что аналогичная проблема для сплайнов нулевого и первого порядков рассмотрена в работе [4].

Локальный кубический сплайн $S(x)$ представляет собой функцию, которая на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ описывается кубическими полиномами

$$S_i(x) = a_{0i} + a_{1i}\lambda + a_{2i}\lambda^2 + a_{3i}\lambda^3,$$

где $\lambda = x - x_i$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Коэффициенты a_{0i}, \dots, a_{3i} находятся из условий интерполяции:

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= \xi(x_i), & S_i(x_{i+1}) &= \xi(x_{i+1}), \\ S'_i(x_i) &= \xi'(x_i), & S'_i(x_{i+1}) &= \xi'(x_{i+1}) \end{aligned}$$

и представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{0i} &= \xi(x_i), & a_{1i} &= \xi'(x_i), \\ a_{2i} &= \frac{3}{h^2} [\xi(x_{i+1}) - \xi(x_i)] - \frac{1}{h} [2\xi'(x_i) + \xi'(x_{i+1})], \\ a_{3i} &= \frac{2}{h^3} [\xi(x_i) - \xi(x_{i+1})] + \frac{1}{h^2} [\xi'(x_i) + \xi'(x_{i+1})]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

С учетом (4) выражение (2) можно записать следующим образом:

$$D_0(h) = \overline{[\xi(x_i + \lambda) - c_1\xi(x_i) - c_2\xi'(x_i) - c_3\xi(x_{i+1}) - c_4\xi'(x_{i+1})]^2}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - (3\lambda^2/h^2) + (2\lambda^3/h^3), & c_2 &= \lambda - (2\lambda^2/h) + (\lambda^3/h^2), \\ c_3 &= (3\lambda^2/h^2) - (2\lambda^3/h^3), & c_4 &= -(\lambda^2/h) + (\lambda^3/h^2). \end{aligned}$$

Не уменьшая общности рассуждений, положим $\overline{\xi}(x) = 0$. Обозначим $D_{\xi} = [\overline{\xi}(x)]^2$, $D_{\xi'} = [\overline{\xi}'(x)]^2$ и $K_{\xi}(\tau) = \overline{\xi}(x)\overline{\xi}(x+\tau)$. Раскрывая правую часть равенства (5) и учитывая, что для стационарного нормального процесса [5, 6]

$$\overline{\xi}(x_i)\overline{\xi}'(x_i) = 0, \quad \overline{\xi}(x_i)\overline{\xi}'(x_i+\lambda) = (dK_{\xi}(\tau)/d\tau)|_{\tau=\lambda}, \quad \overline{\xi}'(x_i)\overline{\xi}'(x_i+\lambda) = - (d^2K_{\xi}(\tau)/d\tau^2)|_{\tau=\lambda},$$

приходим к следующей формуле:

$$D_0(h) (c_1^2 + c_3^2 + 1) D_{\xi} + (c_2^2 + c_4^2) D_{\xi'} + 2c_1c_3K_{\xi}(h) + 2c_1c_4 \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=h} - \\ - 2c_1K_{\xi}(h) + 2c_2c_3 \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=-h} + 2c_2c_4 \left[- \frac{d^2K_{\xi}(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=h} - 2c_2 \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=-h} - \\ - 2c_3K_{\xi}(h-\lambda) - 2c_4 \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=h-\lambda}.$$

Наибольшее значение $D_0(h)$ имеет на середине интервала разбиения, т. е. при $\lambda = h/2$. В этом случае $c_1 = 1/2$, $c_2 = h/8$, $c_3 = 1/2$, $c_4 = -h/8$, что и позволяет найти выражение для максимальной дисперсии ошибки интерполяции ординаты:

$$[D_0(h)]_{\max} = \frac{3}{2} D_{\xi} + \frac{h^2}{32} D_{\xi'} + \frac{1}{2} K_{\xi}(h) + \frac{h}{4} \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=-h} - 2K_{\xi}\left(\frac{h}{2}\right) + \\ + \frac{h^2}{32} \left[\frac{d^2K_{\xi}(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=h} + \frac{h}{2} \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=h/2}. \quad (6)$$

Корреляционные функции дифференцируемых случайных процессов вблизи нулевых значений аргумента с высокой точностью аппроксимируются функцией

$$K_{\xi}(\tau) \approx \sigma_{\xi}^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}. \quad (7)$$

Подставляя ее в (6), получаем удобную для расчетов формулу

$$[D_0(h)]_{\max} \approx \sigma_{\xi}^2 \varphi_1(\alpha h), \quad (8)$$

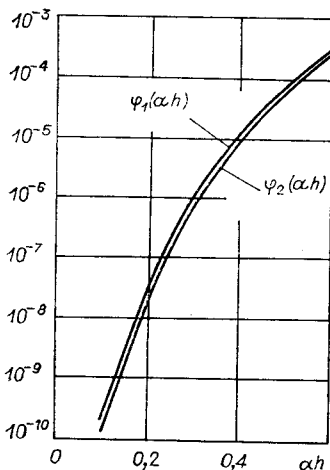
где $\varphi_1(\alpha h) = 3/2 + \alpha^2 h^2/16 + (1/2 + 7\alpha^2 h^2/16 + \alpha^4 h^4/8) e^{-\alpha^2 h^2} - (2 + \alpha^2 h^2/2) e^{-\alpha^2 h^2/4}$.

Аналогичным образом находится и выражение для $D_1(h)$, поэтому поместим здесь лишь конечные результаты, рекомендуемые для практического использования:

$$[D_1(h)]_{\max} = \frac{9}{8} D_{\xi'} + \frac{9}{2h^2} D_{\xi} - \frac{1}{8} \left[\frac{d^2K_{\xi}(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=h} + \frac{3}{2h} \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=h} + \\ + \frac{6}{h} \left[\frac{dK_{\xi}(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=h/2} - \left[\frac{d^2K_{\xi}(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=h/2} - \frac{9}{2h^2} K_{\xi}(h); \quad (9)$$

$$[D_1(h)]_{\max} \approx \alpha^2 \sigma_{\xi}^2 \varphi_2(\alpha h). \quad (10)$$

Здесь $\varphi_2(\alpha h) = 9/4 + (9 - 9e^{-\alpha^2 h^2})/2\alpha^2 h^2 - (11/4 + \alpha^2 h^2/2) e^{-\alpha^2 h^2} - (4 + \alpha^2 h^2) e^{-\alpha^2 h^2/4}$.



На рисунке приведены графики функций $\varphi_1(\alpha h)$ и $\varphi_2(\alpha h)$ для малых значений параметра αh , когда принята аппроксимация (7) обеспечивает приемлемую точность. При больших интервалах дискретизации аппроксимация (7) дает весьма грубые результаты, и тогда следует пользоваться основными формулами (6) и (9).

Пусть, например, требуется интерполировать локальным кубическим сплайном профиль земной поверхности, корреляционная функция которого вблизи нулевых значений имеет вид (7) с параметрами $\sigma_{\xi} = 200$ м и $\alpha = 0,001$ м⁻¹. Допустимые среднеквадратические ошибки интерполяции высоты профиля и его наклона заданы равными 0,5 м и 0,001 рад. Требуется найти интервал разбиения h , при котором ошибки интерполяции не превышают заданных.

Находим $[D_0(h)]_{\max} \leq 0,5^2$ и $[D_1(h)]_{\max} \leq 0,001^2$. Далее,

$$\varphi_1(\alpha h) \leq [D_0(h)]_{\max} / \sigma_{\xi}^2 = 6,2 \cdot 10^{-6},$$

$$\varphi_2(\alpha h) \leq [D_1(h)]_{\max} / \alpha^2 \sigma_{\xi}^2 = 2,5 \cdot 10^{-5}.$$

По графикам рисунка получим, что условие для $\varphi_1(\alpha h)$ выполняется вплоть до $\alpha h = 0,35$ а для $\varphi_2(\alpha h)$ — вплоть до $\alpha h = 0,47$. Первое условие оказалось более жестким, поэтому h должно удовлетворять неравенству $h \leq 0,35/\alpha = 350$ м.

В заключение заметим, что экспериментальное определение корреляционной функции $K_\xi(\tau)$ вблизи $\tau = 0$ и ее аппроксимацию выражением (7) в силу имеющейся, как правило, некоторой нестационарности $\xi(x)$ целесообразно производить, находя структурную функцию $SF(\tau) = \overline{[\xi(x) - \xi(x + \tau)]^2}$, которая связана с $K_\xi(\tau)$ соотношением $SF(\tau) = 2D_\xi - 2K_\xi(\tau)$. Как видно из выражения для $SF(\tau)$, медленная девиация математического ожидания процесса $\xi(x)$ не сказывается на форме начального участка структурной функции. Поэтому по начальному участку $SF(\tau)$ Наука, 1976.

3. Завьялов Ю. С. Сплайн-функции — универсальный математический аппарат для представления и обработки геометрической информации в машиностроении. — В кн.: Методы сплайн-функций (вычислительные системы). Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1976, вып. 68.
4. Немировский А. С., Волконский В. А. Погрешность аппроксимации при дискретных измерениях непрерывных величин. — Измерит. техника, 1963, № 4.
5. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968.
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/Под ред. А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1965, § 32.

*Поступило в редакцию 22 октября 1980 г.;
окончательный вариант — 26 августа 1982 г.*

УДК 621.385.85

С. Я. АФАНАСЬЕВ, С. М. БОРОДИН, В. Я. СТЕНИН
(Москва)

ПРОГРАММИРУЕМОЕ УСТРОЙСТВО УПРАВЛЕНИЯ МАТРИЧНЫМИ ФОРМИРОВАТЕЛЯМИ ВИДЕОСИГНАЛОВ НА ПЗС

Устройство управления режимом матричных формирователей видеосигналов на ПЗС обеспечивает перемещение массивов зарядов в ячейках матриц и их вывод через считывающее устройство [1]. Разнообразие типов матриц и их форматов делает в ряде случаев целесообразными разработку и применение достаточно универсального устройства управления, реализация которого вполне возможна при существующих в настоящее время ограничениях на количество элементов в матрицах ПЗС (не более 10^6) и максимальных частотах считывания выходного сигнала (до 11 МГц). Алгоритм управления матрицей может быть осуществлен аппаратно на основе сочетания модулей с программируемыми характеристиками и контролирующего устройства, задающего программно режим взаимодействия модулей.

Универсальность программируемого устройства управления (ПУУ) определяется модульным принципом его построения, при котором логические условия взаимодействия модулей устанавливаются через общую магистраль связи под действием команд, генерируемых микро-ЭВМ или контроллером с ограниченными возможностями на основе ПЗУ, счетчика команд и устройства, реализующего условные переходы.

Основой ПУУ является набор модулей — программируемых каналов управления (ПКУ), каждому из которых соответствует управляемый им регистр или секция регистров матрицы ПЗС. Назначение ПКУ — формирование по сигналу запуска заданного количества импульсов, управляющих перемещением зарядов в соответствующем регистре матрицы.

Структурная схема ПУУ (рис. 1), построенного на основе четырех ПКУ, иллюстрирует вариант устройства управления матрицами ПЗС, содержащими входной регистр (Вх.Р), выходной регистр (Вых.Р), секции накопления (СН), памяти (СП) и межрегистровые затворы (З1, З2, З3). На этом же рисунке раскрыта структурная схема одного модуля ПКУ — ПКУ1. В модуль ПКУ входит набор блоков, включающий формирователь фазовых сигналов (ФФ), управляемый пропускатель (УП), программируемый дискриминатор (ПД), счетчик импульсов (СИ) и преобра-