

обработки сигнала может быть реализовано на основе аналоговой или цифровой электроники. Сканирование пространственной картины спеклов  $I(\alpha)$  по фотоприемнику, как и регистрация временных спеклов  $I(t)$ , возникающих за движущимся рассеивателем, позволяет повысить общее быстродействие измерения. Если же регистрировать картину спеклов с помощью матрицы фотоприемников, то при параллельной электронной обработке массива сигналов быстродействие измерений может быть меньше  $10^{-6}$  с, что сравнимо с характерными временами процессов в импульсных лазерах.

Автор благодарит Ю. В. Троицкого за постановку проблемы и плодотворное обсуждение результатов работы и А. И. Рыбина за полезные консультации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаев А. Т., Рахвалов В. В., Степанов В. А. Когерентность излучения лазеров, ч. 2.—Обзоры по электронной технике, сер. 4, 1979, вып. 1 (622) (ЦНИИЭлектроника).
2. Денисюк Ю. Н., Стаселько Д. И. О влиянии структуры поперечных мод источника излучения на изображение, создаваемое голограммой.—Опт. и спектр., 1970, т. 28, с. 323.
3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.—М.: Наука, 1981.
4. Саметов А. Р., Суханов И. И., Троицкий Ю. В. Пространственная самосинхронизация поперечных мод в He—Ne-лазере.—Квант. электроника, 1980, т. 9, с. 2023.
5. Клименко И. С., Матинян Е. Г., Скродкий Г. В. Голографическая регистрация сфокусированных изображений в многомодовом излучении лазера.—Опт. и спектр., 1972, т. 33, с. 1139.
6. Fujii H., Asakura T. Statistical properties of image speckle in partially coherent light.—Nouvelle Revue d'Optique, 1975, vol. 6, p. 5.
7. Ohtsubo J., Asakura T. Statistical properties of laser speckle produced in the diffractive field.—Appl. Opt., 1977, vol. 16, p. 1742.
8. Амбарцумян Р. В., Басов Н. Г., Крюков П. Г., Летохов В. С. Оптический квантовый генератор с нерезонансной обратной связью.—ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 724.
9. Герке Р. Р., Денисюк Ю. Н., Локшин В. И. Метод контроля когерентности излучения оптических квантовых генераторов, применяемых в голографии.—ОМП, 1968, № 7.
10. Климков Ю. М. Основы расчета оптико-электронных приборов с лазерами.—М.: Сов. радио, 1978.

Поступила в редакцию 28 ноября 1982 г.

УДК 621.39.1 : 621.378 : 532.574

Г. А. КАЩЕЕВА, В. С. СОБОЛЕВ  
(Новосибирск)

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОРОГОВОГО СПОСОБА ОБРАБОТКИ ДОПЛЕРОВСКОГО СИГНАЛА

Известно [1—3], что наличие в измерительном объеме одновременно нескольких рассеивающих частиц и их случайное положение в потоке приводит к существенным флуктуациям частоты доплеровского сигнала, являющейся мерой скорости. Эти флуктуации, называемые фазовым шумом [4], могут достигать значительных величин и существенно ограничивают точность оценки турбулентных пульсаций скорости. Анализ мгновенной частоты доплеровского сигнала, полученного от двух частиц, движущихся с одинаковой скоростью, показал, что ее максимальные выбросы соответствуют минимуму амплитуды и, наоборот, при больших значениях огибающей сигнала его частота практически не изменяется. На основании этих результатов в 1972 г. [5] предложен и реализован [1] пороговый способ обработки доплеровского сигнала, заключающийся в

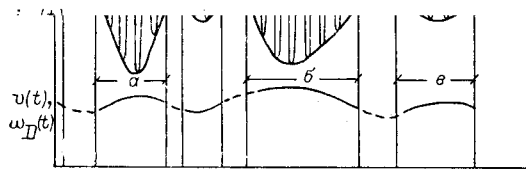


Рис. 1.

том, что демодуляции подвергается только та его часть, амплитуда которой лежит выше некоторого наперед заданного порога. Значения скорости в промежуточные моменты времени определяются путем интерполяции результатов демодуляции. Наглядное представление о существовании этого способа дает рис. 1, где  $a - e$  — участки полезного сигнала.

Цель статьи — получение основных статистических характеристик мгновенной частоты в зависимости от порога и оценка достигаемого при этом выигрыша в точности измерений. Задача решается для многочастотного доплеровского сигнала, моделью которого является узкополосный нормальный случайный процесс вида

$$\xi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t - \varphi(t)]. \quad (1)$$

При этом предполагается, что поток ламинарен и не имеет градиента скорости по сечению измерительного объема лазерного анемометра.

Вначале найдем статистическую связь между случайными отклонениями частоты  $\dot{\varphi}(t)$  и значениями огибающей  $A(t)$ . Двумерная плотность вероятности величин  $\varphi$  и  $A$  может быть найдена на основании известного выражения [6] для четырехмерной плотности вероятности

$$W_4(A, \dot{A}, \varphi, \dot{\varphi}) = (A^2/4\pi^2\sigma^4(-\rho_0'')) \exp \left\{ - [1/2\sigma^2(-\rho_0'')] [(-\rho_0'')A^2 + A^2 + A^2\dot{\varphi}^2] \right\}, \quad (2)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия процесса (1),  $\rho_0''$  — значение второй производной коэффициента корреляции в нуле.

Для оптических схем с гауссовыми пучками значение  $-\rho_0''(0) = \Delta\omega^2$ , где  $\Delta\omega$  — полуширина спектра доплеровского сигнала на уровне  $e^{-1/2}$  его максимума. Интегрируя (2) по  $\dot{A}$  и  $\varphi$  в пределах  $-\infty, +\infty$  для  $\dot{A}$  и  $-\pi, +\pi$  для  $\varphi$ , получим

$$W_2(A, \dot{\varphi}) = (A^2/\sqrt{2\pi}\sigma^3\sqrt{-\rho_0''}) \exp \left\{ -A^2/2\sigma^2 \right\} \exp \left\{ -A^2\dot{\varphi}^2/2\sigma^2(-\rho_0'') \right\}. \quad (3)$$

Переходя к новой относительной переменной  $z = A/\sigma\sqrt{2} = [A^2/\langle A^2 \rangle]^{1/2}$ , ( $\langle A^2 \rangle = 2\sigma^2$  — средний квадрат огибающей), получим

$$W_2(\dot{\varphi}, z) = (2z^2/\sqrt{\pi}\Delta\omega) \exp \left\{ -z^2(\Delta\omega^2 + \dot{\varphi}^2)/\Delta\omega^2 \right\}. \quad (4)$$

На основании этого выражения найдем условную плотность вероятности частоты  $W_2(\dot{\varphi}|z = z_n)$ , когда значения огибающей сигнала превышают некоторый заданный порог  $z_n = A_n/\langle A^2 \rangle^{1/2}$ . По определению [7] можно записать

$$W_2(\dot{\varphi}|z = z_n) = W_2(\dot{\varphi}, z_n)/W(z_n). \quad (5)$$

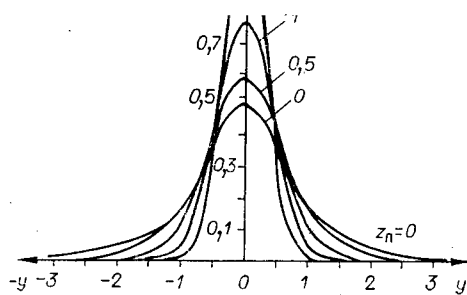


Рис. 2.

Тогда

$$W_2(\dot{\varphi} | z \geq z_{\Pi}) = \int_{z_{\Pi}}^{\infty} W_2(\dot{\varphi}, z) dz \Big/ \int_{z_{\Pi}}^{\infty} W(z) dz, \quad (6)$$

где  $W(z)$  — одномерная плотность вероятности относительной огибающей.  
В соответствии с [6]

$$W(z) = 2z \exp(-z^2). \quad (7)$$

Подставляя (4) и (7) в (6) и вводя новую относительную переменную  $y = \dot{\varphi}/\Delta\omega$ , получим

$$W_2(y | z \geq z_{\Pi}) = (1/\sqrt{\pi}) e^{z_{\Pi}^2} (1 + y^2)^{-3/2} \Gamma(3/2, x). \quad (8)$$

Здесь  $x = z_{\Pi}^2(1 + y^2)$ ,  $\Gamma(3/2, x)$  — неполная гамма-функция.

Семейство плотностей вероятности флуктуаций мгновенной частоты для различных уровней  $z_{\Pi}$  приведено на рис. 2. Из графиков видно, что с увеличением порогового уровня  $z_{\Pi}$  резко уменьшается вероятность больших отклонений частоты и возрастает вероятность малых отклонений. Следовательно, величина среднеквадратичной ошибки с увеличением  $z_{\Pi}$  должна снижаться.

Представляет интерес найти линию регрессии, устанавливающую зависимость математического ожидания модуля отклонений частоты от заданного значения огибающей. По определению

$$m\{|y|\} = \int_{-\infty}^{\infty} |y| W(y | z = z_1) dy = 2 \int_0^{\infty} y W(y | z = z_1) dy, \quad (9)$$

где  $m$  — символ математического ожидания,  $W(y | z = z_1)$  — плотность вероятности частоты при заданном значении  $z_1$ . Подставляя в (9) значение  $W(y | z = z_1)$ , которое в соответствии с (5) равно

$$W(y | z = z_1) = (z_1/\sqrt{\pi}) \exp\{-z_1^2 y^2\},$$

получим

$$m\{|y|\} = 1/(z_1 \sqrt{\pi}). \quad (10)$$

Как следует из (10), среднее значение модуля отклонений частоты ( $|y|$ ) связано с относительным уровнем огибающей ( $z_1$ ) обратно пропорциональной зависимостью. Полученные результаты являются теоретическим обоснованием способа уменьшения фазового шума посредством амплитудной селекции доплеровского сигнала.

Зависимость дисперсии отклонений частоты от порога может быть найдена из соотношения

$$\sigma_{\Pi\dot{\varphi}}^2 = \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = \int_0^{\infty} \int_{z_{\Pi}}^{\infty} \dot{\varphi}^2 W_2(z, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} dz \Big/ \int_{z_{\Pi}}^{\infty} W(z) dz, \quad (11)$$

где значения  $W_2(z, \dot{\varphi})$  и  $W(z)$  определены выражениями (4) и (7). С учетом последних можно записать

$$\sigma_{\Pi\dot{\varphi}}^2 = \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = (1/2) \Delta\omega^2 \exp(+z_{\Pi}^2) E_1(z_{\Pi}^2), \quad (12)$$

где  $E_1$  — интегральная показательная функция.

Аналогичное выражение было получено ранее Ю. А. Щербиной [8]. Относительное среднеквадратичное значение ошибки для мгновенной частоты как функции порога легко может быть найдено из (12):

$$\sigma_{\Pi\dot{\varphi}}/\omega_D = \sqrt{\langle \dot{\varphi}^2 \rangle}/\omega_D = (\Delta\omega/\sqrt{2}\omega_D) \exp(z_{\Pi}^2/2) \sqrt{E_1(z_{\Pi}^2)}. \quad (13)$$

Величина  $\Delta\omega$  для схем с гауссовыми пучками связана с доплеровской

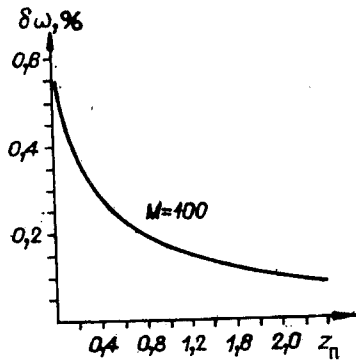


Рис. 3.

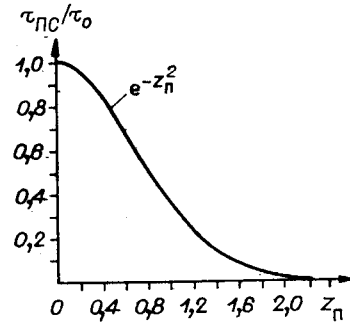


Рис. 4.

частотой  $\omega_D$  и с числом интерференционных полос  $M$  на уровне  $e^{-1}$  огибающей сигнала одиночной частицы простым соотношением

$$\Delta\omega = \omega_D / M\pi. \quad (14)$$

Тогда

$$\delta\omega = \sigma_{\text{нф}} / \omega_D = (1 / \sqrt{2\pi M}) \exp(z_{\text{н}}^2 / 2) \sqrt{E_1(z_{\text{н}}^2)}. \quad (15)$$

График зависимости (15) приведен на рис. 3. Видно, что среднеквадратичная ошибка  $\sigma_{\text{нф}}$  вначале быстро падает с увеличением порога, а затем ее крутизна уменьшается.

На основании выражения (7) легко получить соотношение между длительностью  $\tau_{\text{пс}}$  полезного сигнала и общей длительностью реализации  $\tau_0$ :

$$\tau_{\text{пс}} / \tau_0 = \int_{z_{\text{н}}}^{\infty} W(z) dz \Big/ \int_0^{\infty} W(z) dz = e^{-z_{\text{н}}^2 / 2}, \quad (16)$$

где  $z_{\text{н}}^2 = A_{\text{н}}^2 / \langle A^2 \rangle$ .

График зависимости (16) приведен на рис. 4, откуда следует, что если при  $z_{\text{н}} = 1$  длительность полезного сигнала составляет 0,37% от длительности реализации, то уже при  $z_{\text{н}} = 2$  эта величина падает до 2%. Из рис. 3 и 4 можно сделать вывод о нецелесообразности установления  $z_{\text{н}} > 1,5$ , поскольку длительность полезного сигнала при этом будет составлять менее 10% от общей длительности реализации, а существенного снижения ошибки достигнуто не будет. При условии  $z_{\text{н}} = 1,5$  и  $M = 100$  значение  $\sigma_{\text{нф}} / \omega_D = 0,16\%$ . При других значениях  $M$  эта величина будет соответственно уменьшена или увеличена (в обратно пропорциональной зависимости).

Погрешность измерения можно еще более снизить путем рациональной фильтрации сигнала на выходе частотного дискриминатора при условии, что известна корреляционная функция или спектральная плотность мгновенной частоты для заданного значения порога.

Спектральная плотность мгновенной частоты многочастичного доплеровского сигнала при беспороговом детектировании, как известно [4], эквивалентна спектральной плотности нормального узкополосного процесса. Ее значения в нуле  $S(0)$  максимальны и равны  $4,66 \Delta\omega$  [6]. График спектральной плотности случайной мгновенной частоты  $\phi$  приведен на рис. 6 (кривая  $z_{\text{н}} = 0$ ). Из графика видно, что на уровне  $0,5 S_{\text{max}}$  ширина спектра составляет около  $3\Delta\omega$ , а в области высоких частот значения  $S_{\phi}(\omega)$  уменьшаются как  $1/\omega$ , и, следовательно, дисперсия частоты, являющаяся интегралом от ее спектра, бесконечна. В большинстве случаев спектр турбулентных пульсаций много уже  $\Delta\omega$ , что позволяет счи-

тать фазовый шум в пределах используемой полосы частот белым. При этом его среднеквадратичное значение  $\sigma_f = \sqrt{S(0)\Delta F}$ , где  $\Delta F$  — полоса пропускания фильтра, равная ширине спектра исследуемых турбулентных пульсаций скорости. Для беспорогового детектирования среднеквадратичная относительная ошибка определения мгновенной скорости будет равна

$$\sigma_v/v = \sigma_f/f_D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{S(0)\Delta F/f_D^2} = 0,5 (1/\sqrt{M}) \sqrt{\Delta F/f_D}. \quad (17)$$

Для реальных значений  $\Delta F/f_D = 10^{-3}$  и  $M = 100$  получим  $\sigma_{f/f_D} = 0,2\%$ .

Далее перейдем к анализу спектральной плотности частоты в пороговом режиме демодуляции. Вначале сделаем несколько предварительных замечаний. Как было показано, дисперсия частоты доплеровского сигнала в этом режиме конечна и падает с ростом порога. Следовательно, значения ее корреляционной функции в нуле в отличие от беспороговой демодуляции также конечны и будут падать с ростом порога. Конечность дисперсии предполагает, что интеграл от спектральной плотности фазового шума тоже конечен, а сама спектральная плотность падает быстрее, чем  $1/\omega$ . Поскольку корреляционная функция мгновенной частоты при нулевом пороге является монотонной и убывающей, можно полагать, что с ростом порога ее значения не только в нуле, но и во всех других точках начнут снижаться. Если это так, то спектральная плотность флуктуаций мгновенной частоты в нуле, представляющая собой интеграл от корреляционной функции, будет падать в функции порога.

Желательно подтвердить эти выводы количественными оценками. К сожалению, полученное аналитическое выражение для корреляционной функции мгновенной частоты оказалось настолько сложным, что его анализ, даже с применением современных ЭВМ, слишком дорог. В связи с этим был использован путь машинного моделирования доплеровского сигнала с определением текущих значений огибающей и мгновенной частоты на каждом временном шаге, с выделением участков сигнала с надпороговыми значениями огибающей и численными оценками корреляционной функции и спектральной плотности мгновенной частоты для рассматриваемых участков.

Расчет искомых значений случайной частоты осуществлялся в соответствии с известным [6] выражением

$$\dot{\varphi}(t = n\Delta t) = (\dot{A}_s A_c - \dot{A}_c A_s) / (A_s^2 + A_c^2), \quad (18)$$

где  $A_s$ ,  $A_c$ ,  $\dot{A}_s$ ,  $\dot{A}_c$  — соответственно синусная и косинусная компоненты и их производные по времени комплексной амплитуды  $A(t)$  сигнала. Вычисление каждой составляющей осуществлялось по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_s &= \sum A_i \{t - t_i\} \sin \omega_D t_i, \\ A_c &= \sum A_i \{t - t_i\} \cos \omega_D t_i, \\ \dot{A}_s &= \sum \dot{A}_i \{t - t_i\} \sin \omega_D t_i, \\ \dot{A}_c &= \sum \dot{A}_i \{t - t_i\} \cos \omega_D t_i. \end{aligned} \quad (19)$$

В приведенных выражениях  $t$  — текущее время, дискретные значения которого на каждом временном шаге определяются как  $qh$ ,  $h$  — интервал дискретности,  $A_i = \exp[-\alpha(t - t_i)^2]$  — огибающая сигнала одиночной  $i$ -й частицы,  $t_i$  — случайный момент прихода  $i$ -й частицы в центр измерительного объема,  $\alpha$  — параметр оптической схемы лазерного анемометра, определяемый поперечным размером измерительного объема.

Случайные моменты прихода  $t_i$  вычислялись методом Монте — Карло в предположении, что поток частиц является пуассоновским. Для такого потока интервалы  $\Delta t$  между моментами прихода каждых двух последо-

вательных частиц распределены по показательному закону  $f(\Delta t) = \lambda e^{-\lambda(\Delta t)}$  с параметром  $\lambda$ , обратно пропорциональным заданному среднему интервалу между моментами прихода частиц [7]. При известной длительности одночастичного сигнала, выраженной в доплеровских периодах ( $NT_D$ ), и заданном среднем числе частиц ( $n$ ), одновременно присутствующих в измерительном объеме, величина  $\lambda$  находится как  $n/NT_D$ . Последовательные значения интервалов  $\Delta t_i$  и моментов прихода частиц  $t_i$  получались с помощью датчика случайных чисел в соответствии с выражениями

$$\Delta t_i = -(1/\lambda) \ln P_i = (NT_D/n) \ln P_i, \quad (20)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i, \quad (21)$$

где  $P_i$  — случайное число, равномерно распределенное в пределах [0, 1], генерируемое датчиком случайных чисел. Оценка автокорреляции

Здесь  $N$  — число отсчетов реализации,  $m$  — максимальное число рассчитываемых точек корреляционной функции.

При введении порогового ограничения снизу по огибающей части сигнала с малыми амплитудами из рассмотрения исключалась, а значения случайной частоты на этих участках полагались равными нулю. Поэтому в выражение (22) для корреляционной функции частоты при введении порога должна быть внесена поправка, исключающая из общего числа слагаемых члены с нулевыми значениями произведений  $\dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_{n+q}$ . Тогда

$$\hat{k}_\varphi(qh) = \langle \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_{n+q} \rangle = \frac{1}{N-q-s} \sum_{n=1}^{N-q} \dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_{n+q}, \quad (23)$$

где  $s$  — число нулевых произведений  $\dot{\varphi}_n \dot{\varphi}_{n+q}$  (когда  $\dot{\varphi}_n$  либо  $\dot{\varphi}_{n+q}$ , либо и то и другое значения  $\dot{\varphi}$  равны нулю).

Оценка спектральной плотности случайной компоненты мгновенной частоты сигнала в соответствии с [9] может быть найдена двумя способами:

- 1) стандартный способ, т. е. через фурье-преобразование корреляционной функции (так называемый метод Блекмана и Тьюки);
- 2) способ прямого преобразования Фурье исходной реализации мгновенной частоты с использованием алгоритма БПФ (так называемый метод Кули и Тьюки), который является более эффективным с точки зрения быстродействия.

Авторы посчитали целесообразным воспользоваться первым способом (поскольку оценки корреляционной функции имеют самостоятельное значение и не могут быть опущены), применив алгоритмы БПФ в соответствующей модификации к реализациям корреляционной функции.

Исходя из требований обеспечения точности не менее 5% при оценках спектров и корреляционных функций и разрешения по частоте в спектральной области  $\Delta\Omega = 0,1 \Delta\omega$ , были выбраны следующие значения параметров модели: число реализаций  $r = 400$ , длина реализации  $T_r = 256$  точек, шаг дискретности  $h = 1T_D$ . Результаты проведенного численного анализа представлены на рис. 5 и 6.

На рис. 5 показано семейство корреляционных функций случайной частоты, построенных в зависимости от относительного параметра  $S = x/M_{1/2}$ , где  $x = \tau/T_D$ ,  $M_{1/2} = M/2$ , при различных уровнях порогового

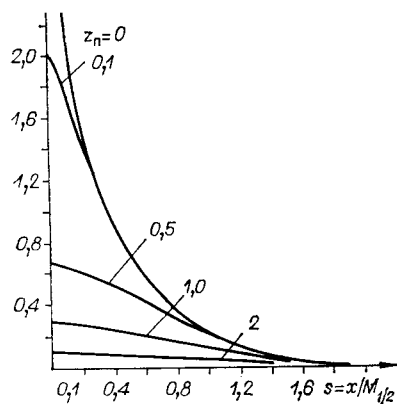


Рис. 5.

ными значениями дисперсии частоты при соответствующих уровнях порога  $z_n$ , а ход кривых при других значениях относительного сдвига  $S$  — с вышеприведенными предположениями.

На рис. 6 приведены графики спектральной плотности частоты  $S(\omega)$  при различных величинах порога (буквы  $T$  и  $M$  означают теоретические и модельные результаты). Видно, что с увеличением порога происходит как сужение спектра, так и уменьшение всех его абсолютных значений на соответствующих частотах. Изменение спектральной плотности в нуле  $S(0)$  от порога аппроксимируется как  $S_0(z_n) = S_0 e^{-z_n}$ .

$$(24)$$

Следовательно, для  $z_n = 1,5$  значение  $S_0(z_n)$  будет уменьшено в 4,5 раза по сравнению со случаем  $z_n = 0$ . Это означает, что при исследовании турбулентных пульсаций скорости величина среднеквадратичной ошибки измерения скорости, определяемой в основном величиной  $S_0$ , при введении порога будет снижена в  $\sqrt{4,5} = 2,1$  раза по сравнению со случаем, когда порог отсутствует, а полоса частот та же самая.

Таким образом, проведенный теоретический и численный анализ позволяет дать оценки потенциально достижимой точности лазерных доплеровских анемометров в пороговом режиме демодуляции. Введение амплитудного порога в отличие от беспороговой демодуляции доплеровского сигнала предоставляет возможность получить конечные значения дисперсии оценок скорости в широкой полосе частот и уменьшает все спектральные компоненты фазового шума. Особенно важным является факт экспоненциального уменьшения спектральной плотности этого шума в нуле с ростом порога.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лазерные доплеровские измерители скорости.— Новосибирск: Наука, 1975.
2. Дюрини Т., Грейтис К. Лазерные системы в гидродинамических измерениях.— М.: Энергия, 1980.
3. Барилл Г. А., Соболев В. С. Оценка точности ЛДИСа с гауссовым распределением интенсивности световых пучков.— Радиотехника и электроника, 1974, № 9.
4. Соболев В. С. О спектре фазового шума на выходе лазерного доплеровского измерителя скорости.— Автометрия, 1974, № 6.
5. Дубнищев Ю. Н. и др. Устройство для обработки сигналов доплеровского измерителя скорости. (Автор. свид-во № 413893) — ОИПОТЗ, 1974, № 33.
6. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника.— М.: Сов. радио, 1966.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1964.
8. Щербина Ю. А. Многочастичные доплеровские измерители скорости и концентрации/Под ред. чл.-кор. АН СССР В. М. Иевлева.— Долгопрудный: ФТИ, 1978.
9. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов.— М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 16 августа 1982 г.

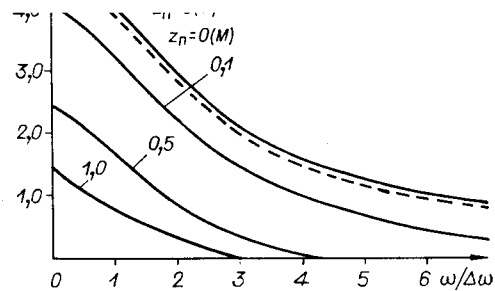


Рис. 6.

ограничения огибающей. Показательно, что значения корреляционных функций для  $S=0$  в точности совпадают с теоретически рассчитанными.